

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

OPTIMALIZACE STAVEBNÍCH KONSTRUKCÍ S PRAVDĚPODOBNOSTNÍMI OMEZENÍMI OPTIMIZATION OF BUILDING CONSTRUCTIONS WITH PROBABILITY CONSTRAINTS

DIPLOMOVÁ PRÁCE
DIPLOMA THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

LUKÁŠ KOKRDA

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

RNDr. PAVEL POPELA, Ph.D.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá penalizačním přístupem k řešení úloh stochastické optimalizace s pravděpodobnostními omezeními, které jsou aplikovány na problémy z oblasti stavební mechaniky. V práci je zpracován inženýrský návrh optimálních rozměrů nosníku. Neurčitost je zahrnuta ve formě náhodného zatížení. Odpovídající model zahrnuje podmínku ve tvaru diferenciální rovnice, která je řešena metodou konečných prvků. Pravděpodobnostní omezení je aproximováno pomocí různých variant penalizací. Výsledky byly obdrženy výpočtem v programu MATLAB.

Summary

The diploma thesis deals with penalty approach to stochastic optimization with chance constraints which are applied to structural mechanics. The problem of optimal design of beam dimensions is modeled and solved. The uncertainty is involved in the form of random load. The corresponding mathematical model contains a condition in the form of ordinary differential equation that is solved by finite element method. The probability condition is approximated by several types of penalty functions. The results are obtained by computations in the MATLAB software.

Klíčová slova

stochastická optimalizace, pravděpodobnostní omezení, metoda konečných prvků, penalizační funkce, MATLAB

Keywords

stochastic optimization, probability constraints, finite element method, penalty function, MATLAB

KOKRDA, L. *Optimalizace stavebních konstrukcí s pravděpodobnostními omezeními*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 68 s. Vedoucí diplomové práce RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

Prohlašuji tímto, že jsem svou bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

Lukáš Kokrda

Děkuji RNDr Popelovi za cenné rady a připomínky k diplomové práci.

Lukáš Kokrda

Obsah

1 Úvod	8
2 Metoda konečných prvků	9
2.1 Metoda vážených reziduí	9
2.2 Galerkinova metoda konečných prvků	10
2.2.1 Formulace elementu	12
2.2.2 Globální matice tuhosti	14
2.3 Aplikace Galerkinovy metody na konstrukční prvky	14
2.3.1 Nosníkový prvek	14
3 Optimalizace	19
3.1 Formulace a klasifikace úloh	19
3.2 Podmínky optimality	20
3.3 Lagrangeova dualita	25
3.3.1 Geometrická interpretace duální úlohy	26
3.3.2 Věty o dualitě	27
3.4 Penalizační funkce	28
3.4.1 Vnější penalizace	28
3.4.2 Rozšířená Lagrangeova penalizační funkce	29
3.4.3 Vnitřní a rozšířená vnitřní penalizace	30
4 Stochastická optimalizace	33
4.1 Pravděpodobnostní prostor a náhodné veličiny	33
4.2 Formulace stochastické úlohy	34
4.3 Dvouúrovňové lineární úlohy s pevným postihem	35
4.3.1 Přípustné množiny	36
4.3.2 Hodnota funkce druhé úrovně	37
4.3.3 Speciální případy postihu	37
4.3.4 Podmínky optimality	38
4.4 Úlohy s pravděpodobnostním omezením	40
4.4.1 Penalizační přístup k řešení úloh s pravděpodobnostními omezeními	44
5 Řešený příklad	48
5.1 Základní formulace	48
5.2 Formulace úlohy	52
5.2.1 Řešení pomocí vnější penalizační funkce	52
5.2.2 Řešení pomocí rozšířené Lagrangeovy penalizační funkce	53
5.2.3 Řešení pomocí rozšířené vnitřní penalizační funkce	54
6 Závěr	55
Literatura	56
Seznam příloh	57

1. Úvod

Při řešení úloh z technické praxe se často setkáváme s obyčejnými diferenciálními rovnicemi, případně parciálními diferenciálními rovnicemi, které jsou natolik složité, že je nelze, nebo jen velmi těžce, řešit analyticky. Pro tyto případy byly vyvinuty aproximační metody řešení. Tyto metody sice neposkytují přesné řešení těchto diferenciálních rovnic, ale za určitých předpokladů k nim tato aproximační řešení konvergují. Jednou z těchto metod je i metoda konečných prvků, které je věnována druhá kapitola. Metoda konečných prvků vychází z metody vážených reziduí, která hledá řešení ve tvaru součtu takzvaných testovacích funkcí.

Další častou třídou úloh technické praxe jsou úlohy hledající řešení, které bude nejlépe vyhovovat zadaným požadavkům. Úlohy tohoto typu se nazývají optimalizační a je jim věnována třetí kapitola. V úvodu této kapitoly se zabýváme formulací a následným rozdělením optimalizačních úloh. Další část této kapitoly se věnuje formulaci podmínek, které musí optimální řešení splňovat. V závěru třetí kapitoly se věnujeme penalizačním funkcím, které nám umožňují převést a optimalizační úlohu s omezeními na posloupnost úloh bez omezení, čehož později využijeme v řešeném příkladu.

Logickým rozšířením optimalizačních úloh je uvažování vlivu náhody v rozhodovacím procesu, takto zavedeme stochastické optimalizační úlohy, kterým je věnována čtvrtá kapitola. V této kapitole se budeme zejména věnovat souvislostem mezi stochastickými úlohami s pravděpodobnostním omezením a dvouúrovňovým lineárním úlohám stochastické optimalizace s pevnou kompenzací. Na začátku této kapitoly zavedeme a popíšeme základní vlastnosti náhodných veličin. Na konci této kapitoly prozkoumáme možnost řešit stochastické úlohy s pravděpodobnostním omezením pomocí penalizačních funkcí.

Pátá kapitola je věnována řešení úloze stochastické optimalizace s pravděpodobnostním omezením z oblasti stavební mechaniky. Neurčitost je zahrnuta ve formě náhodného zatížení. Úloha bude postupně řešena třemi různými penalizačními funkcemi. Výsledky byly obdrženy v programu MATLAB.

2. Metoda konečných prvků

Mnoho praktických úloh v inženýrské praxi je popsáno diferenciálními rovnicemi. Z důvodu komplexnosti geometrie a zatížení je zřídka možné najít přesné řešení. Proto jsou aproximativní řešení diferenciálních rovnic v inženýrské praxi nepostradatelná. Jedna z těchto metod je i metoda konečných prvků. Ačkoliv metoda konečných prvků vychází z několika základních aproximativních metod, pouze jedna z nich bude podrobněji popsána a následně aplikována ve formulaci konečných prvků, viz [5].

2.1. Metoda vážených reziduí

Metoda vážených reziduí je aproximativní metoda řešení okrajových diferenciálních úloh, která využívá testovacích funkcí splňujících předepsané okrajové podmínky a integrální formulace na minimalizování chyby, přes oblast úlohy ve významu průměru. Metoda bude popsána na jednorozměrném případě. Je dána diferenciální rovnice v obecném tvaru

$$D[y(x), x] = 0, \quad a < x < b, \quad (2.1.1)$$

kde D je funkcí x , $y = f(x)$ a jejich derivací. Vzhledem k homogenním okrajovým podmínkám

$$y(a) = y(b) = 0, \quad (2.1.2)$$

pak metoda vážených reziduí hledá aproximativní řešení ve tvaru

$$y^* = \sum_{i=1}^n c_i N_i(x), \quad (2.1.3)$$

kde y^* je aproximativní řešení vyjádřené jako součet součinů neznámého konstantního parametru c_i a testovací funkce $N_i(x)$. Hlavní požadavek který klademe na testovací funkce je ten, aby byly přípustnými funkcemi. To znamená, že testovací funkce jsou spojitě přes oblast úlohy a přesně splňují okrajové podmínky. Dále by měla být testovací funkce vybrána tak, aby splňovala „fyziku“ úlohy. Vzhledem k těmto podmínkám je velmi nepravděpodobné aby řešení ve formě (2.1.3) bylo přesné. Dosazením předpokládaného řešení do diferenciální rovnice (2.1.1) získáme reziduální chybu (dále jen reziduum)

$$R(x) = D[y^*(x), x] \neq 0, \quad (2.1.4)$$

kde $R(x)$ je reziduum. Povšimněme si, že reziduum je také funkcí parametrů c_i . Metoda vážených reziduí vyžaduje, aby neznámé parametry c_i byly voleny taky aby

$$\int_a^b w_i(x) R(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1.5)$$

kde $w_i(x)$ reprezentuje n libovolných váhových funkcí. Vidíme, že z integrace (2.1.5) odvodíme n algebraických rovnic, které mohou být vyřešeny n hodnotami c_i . Rovnice (2.1.5) vyjadřuje, že integrál z vážených reziduálních chyb přes oblast úlohy je roven nule. Vzhledem k požadavkům kladeným na testovací funkce, musí být řešení přesné v koncových bodech (okrajové podmínky musí být splněny), ale obecně v jakémkoliv vnitřním bodě je

2.2. GALERKINOVA METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

reziduální chyba nenulová. Za určitých podmínek může metoda vážených reziduí poskytnout přesné řešení, ale je to spíše výjimka než pravidlo.

Existuje několik variant metody vážených reziduí a primárně se liší ve způsobu určení nebo výběru váhových funkcí. Z důvodů jednoduchého využití a snadné adaptability na metodu konečných prvků bude uvedena pouze Galerkinova metoda.

V Galerkinově metodě vážených reziduí, se váhové funkce zvolí stejné jako testovací funkce, to znamená

$$w_i(x) = N_i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Proto jsou neznámé parametry určeny z

$$\int_a^b w_i(x)R(x) dx = \int_a^b N_i(x)R(x) dx = 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1.6)$$

kteřé opět vedou na n algebraických rovnic na vyčíslení neznámých parametrů.

Jak ale zjistit, že řešení metodou vážených reziduí je dostatečně přesné? Tedy, jak určit že řešení je blízko přesnému řešení? Tato otázka konvergence musí být položena pokaždé, když je použita aproximativní metoda. Pokud není známo přesné řešení, musí se určit nějaké kritérium k určení přesnosti. Obecně, pro metodu vážených reziduí je postup následující, zvyšujeme počet testovacích funkcí a sledujeme chování řešení. Pokud se řešení málo mění s rostoucím počtem testovacích funkcí, říkáme, že řešení konverguje. Zda řešení konverguje ke správnému řešení je jiná otázka, kterou se nebudeme zabývat a budeme předpokládat, že řešení konverguje k přesnému řešení, viz [1], bližší podrobnosti lze nalézt v [10].

2.2. Galerkinova metoda konečných prvků

Klasická metoda vážených reziduí, popsaná v předchozím odstavci, využívá globálních testovacích funkcí N_i , to znamená, že každá testovací funkce se využije na celé oblasti a identicky splňuje okrajové podmínky. Zejména pak v praktičtějších úlohách, dvou a tří-rozměrných, popsanych parciálními diferenciálními rovnicemi, je nalezení testovací funkce a určení přesnosti výsledného řešení nesnadný úkol. Koncept minimalizace reziduální chyby je snadno adaptovatelný do metody konečných prvků následujícím způsobem, viz [5]. Pro ilustrativní účely uvažujme následující diferenciální rovnici

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (2.2.1)$$

s okrajovými podmínkami

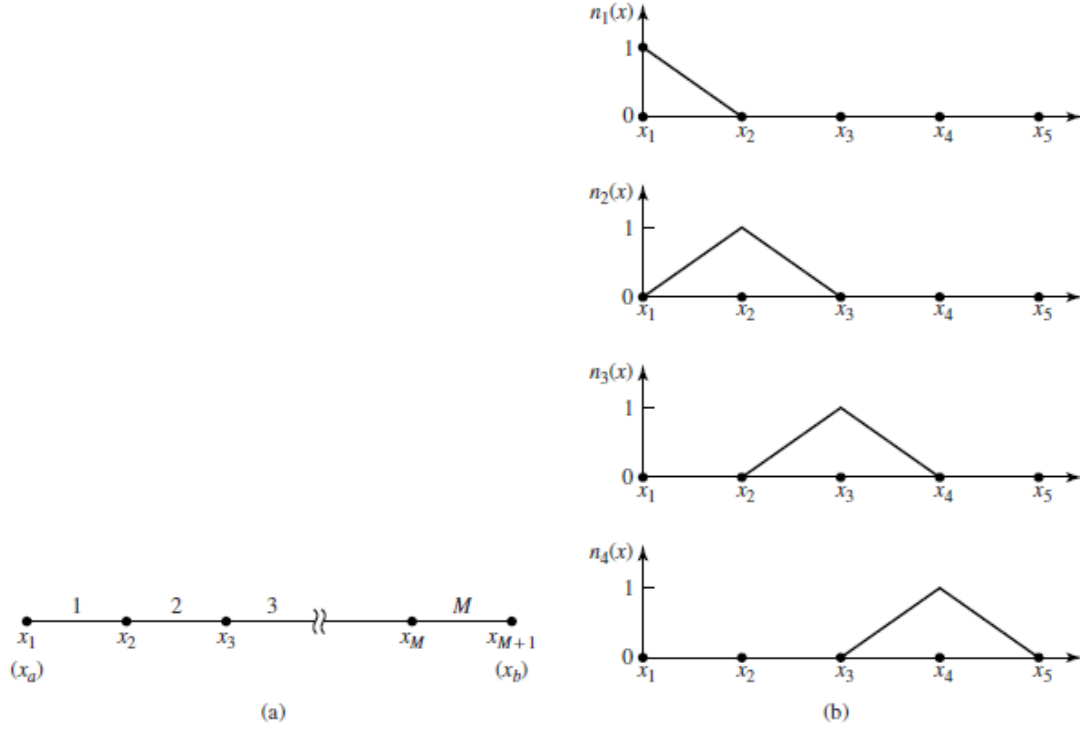
$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (2.2.2)$$

Oblast úlohy je rozdělena na M „elementů“ (Obr 2.1a) ohraničenými $M + 1$ nezávislými hodnotami x_i , tak že $x_1 = x_a$ a $x_{M+1} = x_b$ aby obsahovala globální hranici. Aproximativní řešení předpokládáme ve tvaru

$$y^*(x) = \sum_{i=1}^{M+1} y_i n_i(x), \quad (2.2.3)$$

kde y_i je hodnota řešení v bodech $x = x_i$ a n_i je odpovídající testovací funkce. Všimněme si, že v tomto přístupu, neznámé parametry c_i metody vážených reziduí se stanou neznámé

2. METODA KONEČNÝCH PRVKŮ



Obrázek 2.1: (a) Oblast $x_a \leq x \leq x_b$ rozdělena na M elementů. (b) První čtyři testovací funkce. Všimněte si, že na každém elementu se překrývají jen dvě.

hodnoty řešení v určitých bodech. Dále zde také existuje hlavní rozdíl mezi testovacími funkcemi. Stejně jako v rovnici (2.2.3) jsou testovací funkce n_i nenulové pouze na malé části celé oblasti. Přesněji, testovací funkce $n_i(x)$ je nenulová pouze na intervalu $x_{i-1} < x < x_{i+1}$ a pro jednoduchost využijeme následujících lineárních funkcí:

$$\begin{aligned} n_i(x) &= \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ n_i(x) &= \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ n_i(x) &= 0, & x < x_{i-1}, \quad x > x_{i+1}. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Zřejmě, v tomto případě jsou testovací funkce lineární interpolační funkce, takové, že hodnoty řešení jsou lineární kombinací řešení $y(x)$ na $x_i < x < x_{i+1}$ v uzlových bodech s hodnotami y_i a y_{i+1} . První čtyři testovací funkce jsou vyobrazeny na obrázku 2.1b, a je vidět, že například na intervalu $x_2 \leq x \leq x_3$ je aproximativní řešení dáno rovnicí (2.2.3) takto

$$y^*(x) = y_2 n_2(x) + y_3 n_3(x) = y_2 \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + y_3 \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}. \quad (2.2.5)$$

Zde uvedené testovací funkce jsou lineární, ale funkce vyšších řádů se mohou také použít. Dosazením předpokládaného řešení (2.2.3) do diferenciální rovnice 2.2.1 nám dává reziduum

$$R(x, y_i) = \sum_{i=1}^{M+1} \left[\frac{d^2 y^*}{dx^2} + f(x) \right] = \sum_{i=1}^{M+1} \left[\frac{d^2}{dx^2} (y_i n_i(x)) + f(x) \right], \quad (2.2.6)$$

na které použijeme Galerkinovu metodu vážených reziduí, kde každou váženou funkci použijeme jako funkci testovací a obdržíme

$$\int_{x_a}^{x_b} n_j(x) R(x, y_i) dx = \int_{x_a}^{x_b} n_j(x) \sum_{i=1}^{M+1} \left[\frac{d^2}{dx^2} (y_i n_i(x)) + f(x) \right] dx, \quad (2.2.7)$$

$$j = 1, \dots, M+1,$$

2.2. GALERKINOVA METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

Z rovnic (2.2.4) a obrázku 2.1b vidíme, že na intervalu $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ jsou pouze dvě testovací funkce nenulové. Zohledníme-li toto zjištění, pak rovnice (2.2.7) může být vyjádřena takto

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} n_j(x) \left[\frac{d^2}{dx^2} (y_j n_j(x) + y_{j+1} n_{j+1}(x)) + f(x) \right] dx = 0, \quad j = 1, \dots, M+1. \quad (2.2.8)$$

Integrací rovnice (2.2.8) obdržíme $M+1$ algebraických rovnic s $M+1$ neznámými uzlovými řešeními y_i . Tyto rovnice mohou být přepsány na maticový tvar

$$K\mathbf{y} = \mathbf{F}, \quad (2.2.9)$$

kde K je matice tuhosti, \mathbf{y} je vektor uzlových posunutí a \mathbf{F} je vektor uzlových sil. Rovnice (2.2.7) je obecný zápis Galerkinovy metody konečných prvků a zahrnuje v sobě jak formulaci elementů, tak systém sestavení. Zapsána ve tvaru integrace přes celou oblast úlohy, tato metoda má svůj základ v metodě vážených reziduí. Z rovnic (2.2.8) plyne, že stačí integrovat každou rovnici jen přes jeden element. A nyní prozkoumejme nezávislou formulaci elementů založenou na Galerkinově metodě.

2.2.1. Formulace elementu

Jakmile obdržíme přesné řešení rovnice (2.2.1), pak toto řešení splňuje rovnici na každé podmnožině (a, b) , viz [5]. Jelikož diferenciální rovnici nyní řešíme na intervalu $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$, na kterém jsou lokální testovací funkce n_i testovacími funkcemi globálními, proto budou na dále značeny N_i . Uvažujme úlohu

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) = 0, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}, \quad (2.2.10)$$

kde x_j a x_{j+1} jsou z intervalu (a, b) a jsou to uzly konečného prvku. Odpovídající okrajové podmínky k úloze (2.2.10) jsou

$$y(x_j) = y_j, \quad y(x_{j+1}) = y_{j+1}, \quad (2.2.11)$$

a to jsou neznámé hodnoty řešení v koncových bodech na podoblasti. Nyní navrhneme aproximativní řešení ve tvaru

$$y^{(e)}(x) = y_j N_1(x) + y_{j+1} N_2(x), \quad (2.2.12)$$

kde index (e) naznačuje, že řešení je pro konečný prvek a interpolační funkce jsou definovány takto

$$N_1(x) = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}, \quad (2.2.13a)$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}. \quad (2.2.13b)$$

Všimněme si vztahu mezi interpolačními funkcemi definovanými v (2.2.13) a testovacími funkcemi (2.2.4). Interpolační funkce odpovídají překrývajícím se částem testovacích

2. METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

funkcí použitých na jednom elementu oblasti. Všimněme si také, že interpolační funkce splňují podmínky

$$\begin{aligned} N_1(x_j) &= 1, & N_1(x_{j+1}) &= 0, \\ N_2(x_j) &= 0, & N_2(x_{j+1}) &= 1, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

takové, že okrajové (uzlové) podmínky (2.2.11) jsou identicky splněny. Dosazením předpokládaného řešení do rovnice (2.2.12) získáme rezidua ve tvaru

$$R^{(e)}(x, y_j, y_{j+1}) = \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} + f(x) = \frac{d^2}{dx^2} [y_j N_1(x) + y_{j+1} N_2(x)] + f(x) \neq 0, \quad (2.2.15)$$

index (e) opět značí, že se jedná o reziduum elementu. Aplikací Galerkinova váženého reziduálního kritéria získáváme

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) R^{(e)}(x, y_j, y_{j+1}) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) \left[\frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} + f(x) \right] dx = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.2.16)$$

nebo

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) f(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.2.17)$$

rovnici reziduální chyby elementu.

Použitím integrace per partes na první integrál obdržíme výsledek

$$\left[N_i(x) \frac{dy^{(e)}}{dx} \right]_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dN_i}{dx} \frac{dy^{(e)}}{dx} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) f(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.2.18)$$

z něhož po vyčíslení neintegrálního členu a přeskládání dostaneme následující dvě rovnice

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dN_1}{dx} \frac{dy^{(e)}}{dx} dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_1(x) f(x) dx + \frac{dy^{(e)}}{dx}(x_j), \quad (2.2.19a)$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dN_2}{dx} \frac{dy^{(e)}}{dx} dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_2(x) f(x) dx - \frac{dy^{(e)}}{dx}(x_{j+1}). \quad (2.2.19b)$$

Všimněme si, že v rovnici (2.2.19) bylo využito okrajových podmínek interpolačních funkcí (2.2.14) v uzlových bodech.

Nastavením $j = 1$ pro zjednodušení zápisu a dosazením (2.2.12) do rovnice (2.2.19) obdržíme

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_1}{dx} \left[y_1 \frac{dN_1}{dx} + y_2 \frac{dN_2}{dx} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} N_1(x) f(x) dx + \frac{dy^{(e)}}{dx}(x_1), \quad (2.2.20a)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_2}{dx} \left[y_1 \frac{dN_1}{dx} + y_2 \frac{dN_2}{dx} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} N_2(x) f(x) dx - \frac{dy^{(e)}}{dx}(x_2), \quad (2.2.20b)$$

2.3. APLIKACE GALERKINOVY METODY NA KONSTRUKČNÍ PRVKY

které jsou ve tvaru

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.2.21)$$

Koeficienty matice jsou definovány vztahem

$$k_{ij} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.2.22)$$

a síly působící na uzly elementu jsou dány pravými stranami rovnic (2.2.20).

2.2.2. Globální matice tuhosti

Nyní když máme formulovány rovnice jednotlivých elementů, zkonstruujeme globální rovnice. Toho dosáhneme tím, že sečteme prvky všech elementů v odpovídající uzlech. Ukažme si to na následujícím příkladu o dvou prvcích:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

a

$$\begin{bmatrix} k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} \\ k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix}.$$

Pak globální rovnice je

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} \\ 0 & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix}.$$

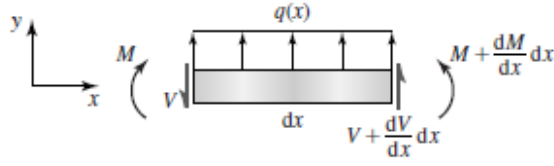
Všimněme si že tato globální matice tuhosti $[K]$ je singulární a proto nelze nalézt jednoznačné řešení přímo, ale tento problém odstraníme využitím okrajových podmínek, viz [5]. Aplikace homogenních okrajových podmínek bude podrobněji popsána v řešeném příkladu.

2.3. Aplikace Galerkinovy metody na konstrukční prvky

2.3.1. Nosníkový prvek

Aplikace Galerkinovy metody na nosníkový prvek začíná úvahou o rovnosti v diferenciálním tvaru, ve směru podélné osy zatíženého nosníku vyobrazeném na obrázku (2.2), kde $q(x)$ je rozložené zatížení jako síla na jednotku délky, viz [5]. Jelikož q se může libovolně měnit, předpokládáme, že je konstantní na dx . Podmínka rovnosti sil ve směru osy y je

$$-V + \left(V + \frac{dV}{dx} dx \right) + q(x) dx = 0, \quad (2.3.1)$$



Obrázek 2.2: Zatížený nosníkový prvek.

ze které vyplývá

$$\frac{dV}{dx} = -q(x). \quad (2.3.2)$$

Podmínka rovnosti momentů, vztažená k levému krajnímu bodu je

$$M + \frac{dM}{dx}dx - M + \left(V + \frac{dV}{dx}dx\right)dx + [q(x)dx] \frac{dx}{2} = 0, \quad (2.3.3)$$

která nám dává

$$\frac{dM}{dx} = -V. \quad (2.3.4)$$

Kombinací rovnic (2.3.2) a (2.3.4) obdržíme

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q(x). \quad (2.3.5)$$

Odvoláme-li se na základní pružnost a pevnost, pak ohybová rovnice odpovídající znaménkové konvenci z obr. (2.2) je

$$M = EI_z \frac{d^2v}{dx^2}, \quad (2.3.6)$$

kde v představuje posun ve směru osy y , v kombinaci s rovnicí (2.3.5) získáme ohybovou rovnici prutu

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2v}{dx^2} \right) = q(x). \quad (2.3.7)$$

Řešení předpokládáme ve tvaru

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (2.3.8)$$

s okrajovými podmínkami

$$v(x_1) = v_1, \quad (2.3.9a)$$

$$v(x_2) = v_2, \quad (2.3.9b)$$

$$\frac{dv}{dx}(x_1) = \theta_1, \quad (2.3.9c)$$

$$\frac{dv}{dx}(x_2) = \theta_2, \quad (2.3.9d)$$

a dále pro zjednodušení uvažujeme, že souřadnicový systém elementů je zvolen takto $x_1 = 0$ a $x_2 = L$.

2.3. APLIKACE GALERKINOVY METODY NA KONSTRUKČNÍ PRVKY

Dosazením předpokládaného řešení do okrajových podmínek následně obdržíme, viz [5] a [7]

$$v(x_1) = v_1 = a_0, \quad (2.3.10a)$$

$$v(x_2) = v_2 = a_0 + a_1L + a_2L^2 + a_3L^3, \quad (2.3.10b)$$

$$\frac{dv}{dx}(x_1) = \theta_1 = a_1, \quad (2.3.10c)$$

$$\frac{dv}{dx}(x_2) = \theta_2 = a_1 + 2a_2L + 3a_3L^2. \quad (2.3.10d)$$

Řešením soustavy (2.3.10) je

$$a_0 = v_1, \quad (2.3.11a)$$

$$a_1 = \theta_1, \quad (2.3.11b)$$

$$a_2 = \frac{3}{L^2}(v_2 - v_1) - \frac{1}{L}(2\theta_1 + \theta_2), \quad (2.3.11c)$$

$$a_3 = \frac{2}{L^3}(v_1 - v_2) - \frac{1}{L^2}(\theta_1 + \theta_2). \quad (2.3.11d)$$

Po dosazení (2.3.11) do (2.3.8) a následné úpravě získáme řešení

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)v_1 + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_1 + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)v_2 + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right)\theta_2, \quad (2.3.12)$$

které je ve tvaru

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2 = \sum_{i=1}^4 N_i(x)\delta_i, \quad (2.3.13a)$$

nebo též v maticovém zápisu

$$v(x) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\}. \quad (2.3.13b)$$

Tedy rezidua na elementu jsou

$$\int_{x_1}^{x_2} N_i \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2v}{dx^2} \right) - q(x) \right] dx = 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (2.3.14)$$

Integrací per partes integračního členu, za předpokladu, že EI_z je konstantní, obdržíme

$$\left[N_i(x) EI_z \frac{d^3v}{dx^3} \right]_{x_1}^{x_2} - EI_z \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \frac{d^3v}{dx^3} dx - \int_{x_1}^{x_2} N_i q(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (2.3.15)$$

a protože platí

$$V = -\frac{dM}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(EI_z \frac{d^2v}{dx^2} \right) = -EI_z \frac{d^3v}{dx^3}, \quad (2.3.16)$$

2. METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

vidíme, že první člen rovnice (2.3.15) představuje podmínku rovnosti sil v uzlových bodech elementu. Další integrací per partes a následným následným přeuspořádáním získáme

$$EI_z \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} N_i q(x) dx - \left[N_i EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} \right]_{x_1}^{x_2} + \left[\frac{dN_i}{dx} EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \right]_{x_1}^{x_2}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (2.3.17)$$

rovnice (2.3.6) a posledního člen pravé strany rovnice (2.3.17) představují podmínku rovnosti momentů na hranici elementu. Rovnice (2.3.17) může být přepsána do maticového tvaru $[k]\{\delta\} = \{F\}$ kde prvky matice tuhosti jsou definovány takto

$$k_{ij} = EI_z \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx, \quad i, j = 1, \dots, 4 \quad (2.3.18)$$

a výsledná matice tuhosti vypadá

$$[k] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (2.3.19)$$

Členy vektoru sil jsou dány takto

$$F_i = \int_{x_1}^{x_2} N_i q(x) dx - \left[N_i EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} \right]_{x_1}^{x_2} + \left[\frac{dN_i}{dx} EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \right]_{x_1}^{x_2}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (2.3.20a)$$

nebo užitím (2.3.6) a (2.3.16)

$$F_i = \int_{x_1}^{x_2} N_i q(x) dx - [N_i V(x)]_{x_1}^{x_2} + \left[\frac{dN_i}{dx} M(x) \right]_{x_1}^{x_2}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (2.3.20b)$$

kde integrální člen představuje odpovídající uzlovou sílu a moment tvořený liniovým zatížením. Jestliže $q(x) = q = \text{konstantě}$, dosazením interpolačních funkcí do rovnic (2.3.20) dostaneme vektor uzlových zatížení elementu

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} + V_1 \\ \frac{qL^2}{12} + M_1 \\ \frac{qL}{2} + V_2 \\ -\frac{qL^2}{12} + M_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.3.21)$$

Posuny jsou důležité, ale v inženýrské praxi je často důležitější zkoumání napětí spojeného s daným zatížením. Rozložení normálového napětí po průřezu umístěným v na ose x je dán vztahem

$$\sigma_x = -\frac{M(x)y}{I_z} = -yE \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad (2.3.22)$$

který po dosazení předpokládaného řešení (2.3.13b) v maticovém tvaru přepíše na

$$\sigma_x(x, y) = -yE \frac{d^2 [N]}{dx^2} \{\delta\}. \quad (2.3.23)$$

2.3. APLIKACE GALERKINOVY METODY NA KONSTRUKČNÍ PRVKY

Protože normálové napětí lineárně závisí na průřezu, tak maximální a minimální hodnoty se nacházejí na povrchu elementu, kde je největší vzdálenost ve směru osy y od neutrální osy. Jak je zvykem, bereme maximální hodnotu jako největší tahové (kladné) napětí a minimální hodnotu jako největší tlakové (záporné) napětí. Tedy přepsaná rovnice (2.3.23) do tvaru

$$\sigma_x(x) = y_{\max} E \frac{d^2[N]}{dx^2} \{\delta\} \quad (2.3.24)$$

určuje maximální a minimální hodnoty normálového napětí na průřezu určeným souřadnicí x . Také y_{\max} určuje největší vzdálenost (jak pozitivní, tak negativní) od neutrální plochy k povrchu elementu. Dosazením interpolačních funkcí a jejich následným zderivováním obdržíme

$$\sigma_x(x) = y_{\max} E \left[\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) v_1 + \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \theta_1 + \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) v_2 + \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_2 \right]. \quad (2.3.25)$$

Z rovnice (2.3.25) je patrné, že normálové napětí podél osy x elementu je lineární, jakmile jsou známy posuny, pak pouze potřebujeme znát hodnoty normálového napětí v uzlech, to znamená $x = 0$ a $x = L$. Hodnoty napětí v uzlech jsou tedy dány vztahy

$$\sigma_x(0) = y_{\max} E \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} & -\frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & -\frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.3.26a)$$

$$\sigma_x(L) = y_{\max} E \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.3.26b)$$

3. Optimalizace

Optimalizační úlohy jsou obecně ty, ve kterých si přejeme optimalizovat nějaké míry uspokojení výběrem hodnot pro množinu proměnných. Tedy optimalizační úlohy odpovídají na otázku „Co je nejlepší?“, raději než „Co se stalo?“, „Co když?“, „Co se stane?“, nebo „Proč se to stalo?“.

3.1. Formulace a klasifikace úloh

Mnoho rozhodovacích úloh může být naformulováno jako *lineární program*, viz [6].

$$\begin{aligned}
 \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \\
 & x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Užitím maticového zápisu získáme zkrácenou formulaci úlohy (3.1.1), kterou zapíšeme takto

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 & A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\
 & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Typické aplikace mohou být nalezeny například v průmyslové výrobě, přepravě, zemědělství, energetice, ekologii a mnoha dalších, viz [6]. V úloze (3.1.1) uvažujeme koeficienty c_j (např koeficient cen), a_{ij} (např produktivita) a b_i (např požadavky nebo kapacity) za konstantní reálné hodnoty a naším úkolem je najít optimální kombinaci hodnot proměnných x_j (např faktor vstupů, míra činnosti nebo energetický tok), které mají splnit zadaná omezení. Samozřejmě, model (3.1.1) poskytuje rozumné výsledky pouze, pokud popisuje skutečný problém který je dostatečně lineární v rozhodujících proměnných. Pokud je tato podmínka porušena, například kvůli rostoucím marginálním nákladům nebo klesající marginální zisky z výroby, měli bychom použít obecnější formulaci k popsání modelu:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(\mathbf{x}) \\
 & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n.
 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Úloha (3.1.3) je známá jako úloha *matematického programování*. Množina X , stejně jako funkce $f, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ jsou dány modelovacím procesem.

Množinu všech \mathbf{x}' splňujících

$$\begin{aligned}
 & g_i(\mathbf{x}') \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \mathbf{x}' \in X \subset \mathbb{R}^n,
 \end{aligned}$$

nazveme množinou přípustných řešení a označíme ji X' .

Přípustné řešení \mathbf{x}^* nazveme optimálním řešením minimalizační úlohy jestliže platí

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}),$$

3.2. PODMÍNKY OPTIMALITY

pro všechna $\mathbf{x} \in X'$.

V závislosti na vlastnostech modelu, určených funkcemi $f, g_i, i = 1, \dots, m$ a množinou X , úlohu (3.1.3) nazýváme:

1. *lineární*, pokud množina X je polyedrická množina a funkce $f, g_i, i = 1, \dots, m$ jsou lineární;
2. *nelineární*, pokud alespoň jedna z funkcí $f, g_i, i = 1, \dots, m$ je nelineární, nebo množina X není polyedrická, nelineární úlohy dále dělíme na
 - (a) *konvexní*, pokud $X \cap \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m\}$ je konvexní množina a f je konvexní funkce
 - (b) *nekonvexní*, pokud buď $X \cap \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m\}$ je nekonvexní nebo účelová funkce f je nekonvexní.

Případ (2b) je také nazýván *globální optimalizací*. Další speciální třídou úloh jsou (*smíšené*) *celočíselné úlohy*, které nastanou, pokud množina X vyžaduje, aby (alespoň některé) proměnné $x_j, j = 1, \dots, n$ nabývaly pouze celočíselných hodnot.

3.2. Podmínky optimality

Nyní se zaměříme na kritéria zaručující optimalitu řešení a formulujeme nutné a postačující podmínky optimality, viz [1].

Neomezené úlohy

Neomezená úloha je problém ve tvaru

$$\min f(\mathbf{x})$$

bez jakýchkoli omezení na vektor \mathbf{x} . Neomezené úlohy uvádíme proto, že podmínky optimality pro omezené úlohy jsou logickým rozšířením podmínek optimality úloh neomezených.

Definice 3.1. Uvažujme úlohu $\min f(\mathbf{x})$ na množině \mathbb{R}^n a mějme $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže platí $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$, pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pak $\bar{\mathbf{x}}$ nazveme *globálním minimem*. Jestliže existuje ε -okolí $N_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}})$ okolo bodu $\bar{\mathbf{x}}$, takové, že platí $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \in N_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}})$, pak $\bar{\mathbf{x}}$ nazveme *lokálním minimem*, pokud ale platí $f(\bar{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x} \in N_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}), \bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}$, pro některé $\varepsilon > 0$, pak $\bar{\mathbf{x}}$ nazveme *striktním lokálním minimem*. Zřejmě *globální minimum* je také *lokální minimum*.

Nutné podmínky optimality

Mějme bod $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ a chceme určit, pokud je to možné, zda daný bod je, či není lokálním nebo globálním minimem funkce f . Pro tyto účely potřebujeme charakterizovat minimalizační řešení. Naštěstí předpoklad diferencovatelnosti funkce f poskytuje prostředky na získání této charakterizace, viz [1].

Věta 3.1. Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\bar{\mathbf{x}}$. Pokud existuje vektor \mathbf{d} splňující $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} < 0$, pak existuje $\delta > 0$, pro které platí $f(\bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) < f(\bar{\mathbf{x}})$ pro každé $\lambda \in (0, \delta)$. Pak \mathbf{d} je směr poklesu funkce f v bodě $\bar{\mathbf{x}}$.

Důsledek 3.1.1. Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\bar{\mathbf{x}}$. Pokud je $\bar{\mathbf{x}}$ lokální minimum, pak $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Věta 3.2. Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná v bodě $\bar{\mathbf{x}}$. Pokud je $\bar{\mathbf{x}}$ lokální minimum, pak $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ a $H(\bar{\mathbf{x}})$ je pozitivně semidefinitní.

Postačující podmínky optimality

Dosud uvedené podmínky jsou nutné podmínky, to znamená, že musí být splněny pro každé lokální optimum. Na druhé straně, bod splňující tyto podmínky nemusí být lokálním optimelem.

Věta 3.3. Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná v bodě $\bar{\mathbf{x}}$. Pokud $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ a $H(\bar{\mathbf{x}})$ je pozitivně semidefinitní, pak $\bar{\mathbf{x}}$ je striktní lokální minimum.

Věta 3.4. Mějme funkci $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pseudokonvexní, viz [5], v bodě $\bar{\mathbf{x}}$. Pak $\bar{\mathbf{x}}$ je globální minimum jen a pouze tehdy, když $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Úlohy s nerovnostními omezeními

V této části nejdříve uvedeme nutné podmínky optimality pro úlohu

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in S, \end{aligned}$$

pro obecnou množinu S , viz [1]. Později množinu S definujeme přesněji jako přípustnou množinu nelineární úlohy ve tvaru

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Definice 3.2. Nechť množina S je neprázdnou podmnožinou množiny \mathbb{R}^n a $\bar{\mathbf{x}} \in \text{cl } S$. Kužel přípustných směrů množiny S v $\bar{\mathbf{x}}$, označujeme D a definujeme jej vztahem

$$D = \{\mathbf{d} : \mathbf{d} \neq 0, \text{ a } \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d} \in S, \text{ pro všechna } \lambda \in (0, \delta) \text{ pro nějaké } \delta > 0\}.$$

Každý nenulový vektor $\mathbf{d} \in D$ se nazývá přípustný směr. Navíc pro danou funkci $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, kužel zlepšujících směrů v $\bar{\mathbf{x}}$, označený F je dán vztahem

$$F = \{\mathbf{d} : f(\bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) < f(\bar{\mathbf{x}}) \text{ pro všechna } \lambda \in (0, \delta) \text{ pro nějaké } \delta > 0\}.$$

Každý směr $\mathbf{d} \in F$ se nazývá zlepšující směr, nebo směr poklesu, funkce f v bodě $\bar{\mathbf{x}}$.

Z předchozí definice plyne, že malým posunem z bodu $\bar{\mathbf{x}}$ podél vektoru $\mathbf{d} \in D$ se posuneme do přípustného bodu, zatímco podobný posun podél $\mathbf{d} \in F$ se dostaneme do řešení, které zlepšuje hodnotu účelové funkce.

3.2. PODMÍNKY OPTIMALITY

Věta 3.5. *Uvažujme úlohu*

$$\min_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$$

kde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a S je neprázdná podmnožina \mathbb{R}^n . Předpokládejme, že f je diferencovatelná v $\bar{\mathbf{x}} \in S$. Pokud $\bar{\mathbf{x}}$ je optimální lokální řešení, pak platí $F_0 \cap D = \emptyset$, kde $F_0 = \{d : \nabla f(\bar{\mathbf{x}})^T d < 0\}$ a D je kužel přípustných směrů množiny S v bodě $\bar{\mathbf{x}}$. Opačně, předpokládejme, že $F_0 \cap D = \emptyset$, f je pseudokonvexní v $\bar{\mathbf{x}}$ a existuje ε -okolí $N_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}})$, $\varepsilon > 0$, takové, že $\mathbf{d} = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \in D$ pro jakýkoliv bod $\mathbf{x} \in S \cap N_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}})$. Pak $\bar{\mathbf{x}}$ je lokálním minimem funkce f .

Všimněme si, že množina F_0 definovaná ve větě 3.5 poskytuje algebraickou charakteristiku množiny směrů poklesu F . Ve skutečnosti obecně podle věty 3.1 platí $F_0 \subseteq F$. Také pokud $\mathbf{d} \in F$, musí platit $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} \leq 0$, nebo analogicky podle věty 3.1, $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} > 0$ by naznačovalo, že \mathbf{d} je směr růstu. Proto máme

$$F_0 \subseteq F \subseteq F'_0 = \{\mathbf{d} \neq 0, \nabla f(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} \leq 0\}. \quad (3.2.1)$$

Všimněme si, že když $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} = 0$, tak si nejsme jistí chováním funkce f , jak postupujeme z bodu $\bar{\mathbf{x}}$ ve směru \mathbf{d} , ledaže víme víc o funkci f .

Lemma 3.1. *Uvažujme diferencovatelnou funkci $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a mějme F, F_0, F'_0 stejně definované jako v definici 3.2, větě 3.5 a (3.2.1). Pak $F_0 \subseteq F \subseteq F'_0$. Dokonce pokud je f pseudokonvexní v $\bar{\mathbf{x}}$, pak $F = F_0$ a pokud je f striktně pseudokonkávní, viz [5], v $\bar{\mathbf{x}}$, pak $F = F'_0$.*

Nyní specifikujeme přípustnou množinu S následujícím způsobem

$$S = \{\mathbf{x} \in X, g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ pro } i = 1, \dots, m\},$$

kde $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pro $i = 1, \dots, m$ a X je neprázdná otevřená množina v \mathbb{R}^n . To nám dá následující úlohu nelineární optimalizace s nerovnostními omezeními

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m, \\ \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Vzpomeňme si na nutnou podmínku lokální optimality v bodě $\bar{\mathbf{x}}$, že $F_0 \cap D = \emptyset$, kde F_0 je otevřený poloprostor definovaný gradientem $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$ a D , kuzelem přípustných směrů, který není nutně definován gradientem funkce f . To znemožňuje zapsat podmínku geometrické optimality $F_0 \cap D = \emptyset$ do vhodnějšího algebraického tvaru.

Lemma 3.2. *Uvažujme přípustnou množinu $S = \{\mathbf{x} \in X, g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ pro } i = 1, \dots, m\}$, kde X je neprázdná podmnožina \mathbb{R}^n a kde $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, pro $i = 1, \dots, m$. Pro přípustný bod $\bar{\mathbf{x}} \in S$ mějme $I = \{i, g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$ množinu indexů aktivních omezení a předpokládejme, že g_i pro $i \in I$ jsou diferencovatelné v $\bar{\mathbf{x}}$ a g_i jsou spojité v $\bar{\mathbf{x}}$ pro $i \notin I$. Definujme množiny*

$$\begin{aligned} G_0 &= \{d : \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})^T d < 0, \forall i \in I\}, \\ G'_0 &= \{d \neq 0 : \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})^T d \leq 0, \forall i \in I\}. \end{aligned}$$

Pak platí

$$G_0 \subseteq D \subseteq G'_0. \quad (3.2.2)$$

Navíc pokud $g_i, i \in I$ jsou striktně pseudokonvexní v $\bar{\mathbf{x}}$, pak $D = G_0$; a pokud $g_i, i \in I$, jsou pseudokonkávní v $\bar{\mathbf{x}}$ pak platí $D = G'_0$.

Věta 3.6. Uvažujme optimalizační úlohu

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \mathbf{x} \in X, \end{aligned}$$

kde X je neprázdná podmnožina \mathbb{R}^n , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pro $i = 1, \dots, m$, $\bar{\mathbf{x}}$ je přípustný bod a označme $I = \{i : g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$. Navíc předpokládejme, že f a g_i pro $i \in I$ jsou diferencovatelné v $\bar{\mathbf{x}}$ a $g_i, i \notin I$ jsou spojité v $\bar{\mathbf{x}}$. Jestliže $\bar{\mathbf{x}}$ je lokálním optím, pak $F_0 \cap G_0 = \emptyset$, kde $F_0 = \{d : \nabla f(\bar{\mathbf{x}})^T d < 0\}$ a $G_0 = \{d : \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})^T d < 0, \forall i \in I\}$. Opačně, jestliže $F_0 \cap G_0 = \emptyset$ a jestliže f je pseudokonvexní v $\bar{\mathbf{x}}$ a $g_i, i \in I$ jsou striktně pseudokonvexní na nějakém ε -okolí bodu $\bar{\mathbf{x}}$, pak $\bar{\mathbf{x}}$ je lokálním minimem.

Věta 3.7. (Fritz Johnovy nutné podmínky) Mějme neprázdnou otevřenou množinu $X \in \mathbb{R}^n$ a funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pro $i = 1, \dots, m$. Uvažujme úlohu P :

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Mějme, že $\bar{\mathbf{x}}$ je přípustným řešením a označme $I = \{i : g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$. Navíc předpokládejme, že f a g_i pro $i \in I$ jsou diferencovatelné v $\bar{\mathbf{x}}$ a $g_i, i \notin I$ jsou spojité v $\bar{\mathbf{x}}$. Pokud $\bar{\mathbf{x}}$ je lokálním řešením úlohy P , pak existují skaláry u_0 a u_i pro $i \in I$ splňující

$$\begin{aligned} u_0 \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) &= 0, \\ u_0, u_i &\geq 0, & \text{pro } i \in I, \\ (u_0, \mathbf{u}_I) &\neq (0, 0), \end{aligned}$$

kde \mathbf{u}_I je vektor, jehož složky jsou u_i pro $i \in I$. Navíc pokud i funkce g_i pro $i \notin I$ jsou také diferencovatelné v $\bar{\mathbf{x}}$, pak předcházející podmínky mohou být zapsány v následující ekvivalentní formě:

$$\begin{aligned} u_0 \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) &= 0, \\ u_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) &= 0, & \text{pro } i = 1, \dots, m, \\ u_0, u_i &\geq 0, & \text{pro } i = 1, \dots, m, \\ (u_0, \mathbf{u}) &\neq (0, 0), \end{aligned}$$

kde \mathbf{u} je vektor, jehož složky jsou u_i pro $i = 1, \dots, m$.

Skaláry u_0 a u_i pro $i = 1, \dots, m$ z věty 3.7 se nazývají Lagrangeovy multiplikátory. Podmínka na přípustnost $\bar{\mathbf{x}}$ úlohy P se nazývá primární podmínka přípustnosti, značí se PF od primal feasibility. Zatímco požadavek $u_0 \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, (u_0, \mathbf{u}) \neq (0, 0)$ a $(u_0, \mathbf{u}) \neq (0, 0)$ se někdy označují za podmínky duální přípustnosti, značí se DF, od dual feasibility. Podmínky $u_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ pro $i = 1, \dots, m$ se nazývají komplementární podmínky průvěsu, značí se CS od complementary slackness.

Všimli jsme si, že bod $\bar{\mathbf{x}}$ je FJ bodem (tj. splňuje podmínky věty 3.7), jen a pouze tehdy, když $F_0 \cap G_0 = \emptyset$. Konkrétně tato podmínka platí v každém přípustném bodu $\bar{\mathbf{x}}$ ve kterém $G_0 = \emptyset$, nezávisle na účelové funkci. Například pokud přípustná množina nemá žádný vnitřek v bezprostředním okolí bodu $\bar{\mathbf{x}}$, nebo když gradient některého aktivního omezení (které může být dokonce redundantní) zmizí, $G_0 = \emptyset$.

3.2. PODMÍNKY OPTIMALITY

Věta 3.8. (Karush-Kuhn-Tuckerovy nutné podmínky (KKT)) Mějme neprázdnou otevřenou množinu $X \in \mathbb{R}^n$ a funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pro $i = 1, \dots, m$. Uvažujme úlohu P :

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

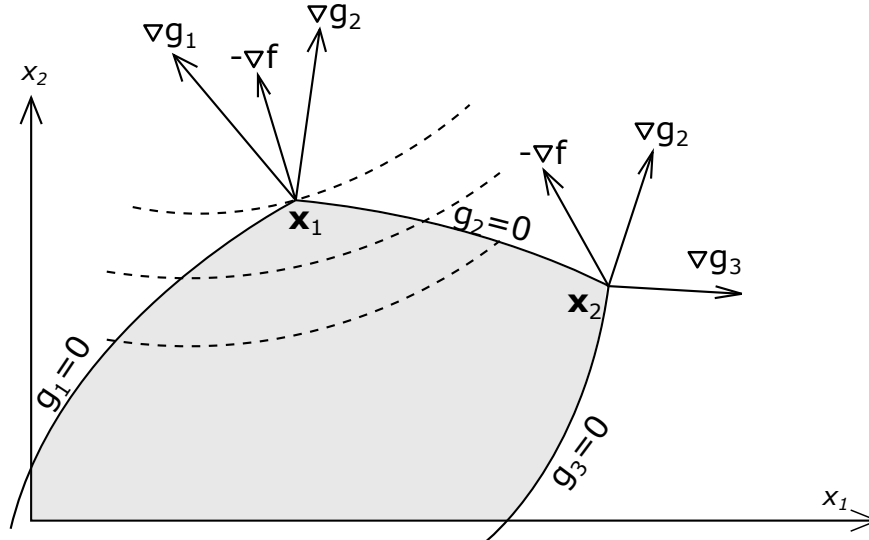
Mějme, že $\bar{\mathbf{x}}$ je přípustným řešením a označme $I = \{i : g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$. Navíc předpokládejme, že f a g_i pro $i \in I$ jsou diferencovatelné v $\bar{\mathbf{x}}$ a $g_i, i \notin I$ jsou spojité v $\bar{\mathbf{x}}$. Navíc předpokládejme, že $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$ pro $i \in I$ jsou lineárně nezávislé. Pokud $\bar{\mathbf{x}}$ je lokálním řešením úlohy P , pak existují skaláry u_i pro $i \in I$ splňující

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) &= 0, \\ u_i &\geq 0, \quad \text{pro } i \in I. \end{aligned}$$

Navíc pokud i funkce g_i pro $i \notin I$ jsou také diferencovatelné v $\bar{\mathbf{x}}$, pak předcházející podmínky mohou být zapsány v následující ekvivalentní formě:

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) &= 0, \\ u_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) &= 0, \quad \text{pro } i = 1, \dots, m, \\ u_i &\geq 0, \quad \text{pro } i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Geometrická interpretace Karush-Kuhn-Tuckerových podmínek



Obrázek 3.1: Grafické znázornění podmínek KKT.

Všimněme si, že každý vektor ve tvaru $\sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$, kde $u_i \geq 0$ pro $i \in I$, patří do kuželu generovaného gradienty aktivních podmínek. Podmínky duální přípustnosti podmínek KKT $-\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$ a $u_i \geq 0$ pro $i \in I$ mohou být interpretovány jako $-\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$ patří do kuželu generovaným gradienty aktivních omezení v daném přípustném řešení $\bar{\mathbf{x}}$. Obrázek 3.1 znázorňuje koncept dvou bodů \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 . Všimněme si, že $-\nabla f(\mathbf{x}_1)$ patří do kuželu generovaného gradienty aktivních omezení v \mathbf{x}_1 a proto \mathbf{x}_1 je KKT bodem,

tedy \mathbf{x}_1 splňuje podmínky KKT. Na druhé straně $-\nabla f(\mathbf{x}_2)$ leží mimo kužel generovaným gradienty aktivních omezení v bodě \mathbf{x}_2 a tedy nesplňuje KKT podmínky.

3.3. Lagrangeova dualita

K dané nelineární úloze existuje jiná nelineární úloha s ní úzce spojená. Původní úloha se nazývá primární úloha, té druhé se říká Lagrangeova duální úloha, viz [1]. Za jistých předpokladů konvexnosti a vhodných typů omezení mají primární i duální úlohy stejnou hodnotu účelové funkce, a proto je možné primární úlohu vyřešit nepřímo vyřešením úlohy duální.

Definice 3.3. *Uvažujme následující nelineární optimalizační úlohu P , kterou nazveme primární úlohou*

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, l, \\ \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Pak Lagrangeovou duální úlohou D k primární úloze P rozumíme úlohu

$$\begin{aligned} \max \Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\text{kde } \Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \inf \{ f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^l v_j h_j(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \}.$$

Všimněme si že Lagrangeova duální funkce Θ může předpokládat hodnotu $-\infty$ pro některé vektory $(\mathbf{u}; \mathbf{v})$. V této úloze byla omezení $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ a $h_j(\mathbf{x}) = 0$ zahrnuta do účelové funkce užitím Lagrangeových multiplikátorů u_i a v_j . Dále si všimněme, že činitel u_i spojený s nerovnostním omezením $g_i \leq 0$ je nezáporný, zatímco činitel v_j spojený s rovnostním omezením $h_j(\mathbf{x}) = 0$ znaménko předepsané nemá.

Jelikož duální úloha se skládá z maximalizace infima (největší dolní meze) funkce $f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^l v_j h_j$, tak se někdy označuje za max-min duální úlohu. Poznamenejme, že někdy zapíšeme D jako $\sup \{ \Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \}$, raději než $\max \{ \Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \}$, jelikož maximum nemusí existovat.

Primární i duální úloha jsou přepsány užitím vektorového zápisu do následujícího tvaru, kde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je vektor funkcí, jehož i tá složka je g_i a $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ je vektor funkcí, jehož j tá složka je h_j .

Primární úloha P

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Lagrangeova duální úloha D

$$\begin{aligned} \max \Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\text{kde } \Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \inf \{ f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \}.$$

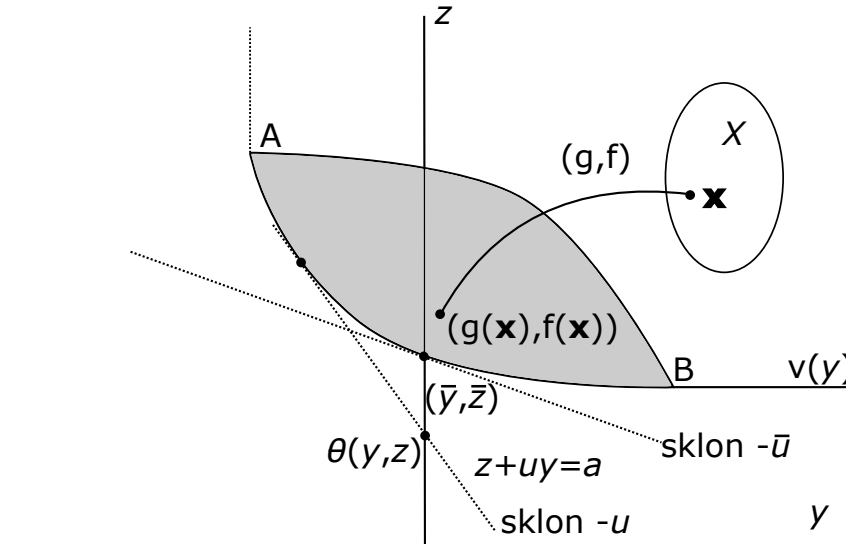
3.3. LAGRANGEOVA DUALITA

3.3.1. Geometrická interpretace duální úlohy

Nyní krátce rozebereme geometrickou interpretaci duální úlohy, viz [1]. Pro jednoduchost uvažujme jediné nerovnostní omezení a žádné rovnostní omezení úlohy. Pak primární úloha je $\min f(\mathbf{x})$ vzhledem k $\mathbf{x} \in X$ a $g(\mathbf{x}) \leq 0$.

V rovině (y, z) množina $\{(y, z) : y = g(\mathbf{x}), z = f(\mathbf{x}) \text{ pro } \mathbf{x} \in X\}$ je označena G v obrázku 3.2. Tedy G je obrazem X užitím zobrazení (g, f) . Primární úloha hledá bod množiny G s $y \leq 0$, který má minimální souřadnici z . Zřejmě tento bod je (\bar{y}, \bar{z}) v obrázku 3.2.

Nyní předpokládejme že máme dané $u \geq 0$. K určení $\Theta(u)$, potřebujeme minimalizovat



Obrázek 3.2: Grafická interpretace Lagrangeovy duality.

$f(\mathbf{x}) + ug(\mathbf{x})$ přes všechna $\mathbf{x} \in X$. Užitím $y = g(\mathbf{x})$ a $z = f(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x} \in X$, chceme minimalizovat $z + uy$ přes body v G . Všimněme si, že $z + uy = \alpha$ je rovnice přímky se sklonem $-u$ a průsečíkem α na ose z . K minimalizaci $z + uy$ na množině G , potřebujeme posunout přímku $z + uy = \alpha$ paralelně dolů jak je jen možné, zatímco zůstane v kontaktu s G . Pak nám průsečík na ose z dává hodnotu $\Theta(u)$, jako na obrázku 3.2. Proto je duální úloha je ekvivalentní k hledání sklonu tečné nadroviny, jejíž průsečík na ose z je maximální. Na obrázku 3.2, tato nadrovina má sklon $-\bar{u}$ a dotýká se množiny G v bodě (\bar{y}, \bar{z}) . Tedy optimálním řešením je \bar{u} a optimální hodnotou duální účelové funkce je \bar{z} . Navíc optimální hodnota účelové funkce primární i duální úlohy se v tomto případě rovnají.

S tím je spojená zajímavá interpretace, která poskytuje důležitý koncepční nástroj. Pro uvažovanou úlohu definujeme funkci

$$v(y) = \min\{f(\mathbf{x}) : g(\mathbf{x}) \leq y, \mathbf{x} \in X\}.$$

Funkce v se nazývá uvolněnou (pertubated) funkcí, jelikož optimální hodnota funkce úlohy obdrženou z původní úlohy uvolněním pravé strany nerovnostního omezení $g(\mathbf{x}) \leq 0$ na y z hodnoty nula. Všimněme si, že $v(y)$ je nerostoucí funkce, jak y roste, přípustná oblast uvolněné úlohy se zvětšuje, nebo zůstává stejná. Pro tento případ je tato funkce znázorněna na obrázku 3.2. V tomto případě v odpovídá spodní obálce G mezi body A a B , protože tato obálka sama je monotonně klesající. Dokonce v zůstává konstantní v hodnotě bodu B pro hodnoty y vyšší než ta v bodě B a je ∞ pro body nalevo od A z důvodu nepřípustnosti. Obecně, pokud je v diferencovatelná v počátku, vidíme, že $v'(0) = -\bar{u}$.

Proto marginální rychlost změny hodnoty účelové funkce s růstem pravé strany omezení z její současné hodnoty v nule je dána $-\bar{u}$, zápornou hodnotou Lagrangeova multiplikátoru v optimu. Když je v konvexní, ale není diferencovatelná v počátku, pak $-\bar{u}$ je zřejmě subgradient v v $y = 0$. V obou případech víme, že $v(y) \geq v(0) - \bar{u}y$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$.

3.3.2. Věty o dualitě

Věta 3.9. (Slabá věta o dualitě) *Nechť x je přípustné řešení úlohy P , to znamená $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0$ a $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$. A zároveň (\mathbf{u}, \mathbf{v}) je přípustné řešení duální úlohy D , to jest $\mathbf{u} \geq 0$. Pak $f(\mathbf{x}) \geq \Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.*

Důsledek 3.9.1.

$$\inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\} \geq \sup\{\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \geq 0\}.$$

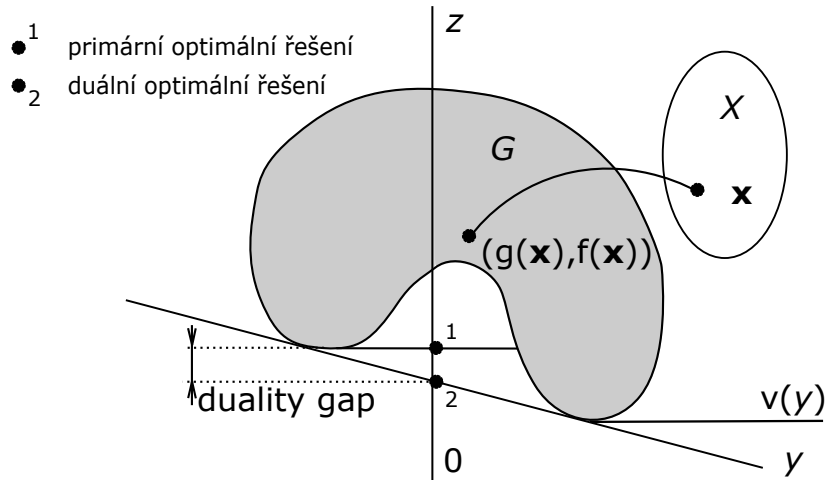
Důsledek 3.9.2. *Jestliže $f(\bar{\mathbf{x}}) = \Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$, kde $\{\bar{\mathbf{u}} \geq 0\}$ a $\bar{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\}$, pak $\bar{\mathbf{x}}$ a $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ řeší primární a duální úlohu.*

Důsledek 3.9.3. *Jestliže $\inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\} = -\infty$, pak $\Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = -\infty$ pro každé $\mathbf{u} \geq 0$.*

Důsledek 3.9.4. *Jestliže $\sup\{\Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})\} = \infty$, pak primární úloha nemá přípustné řešení.*

Duality gap

Z důsledku 3.9.1 věty 3.9 optimální hodnota účelové funkce primární úlohy je větší nebo rovna optimální hodnotě účelové funkce duální úlohy. Jestliže platí striktní nerovnost, pak existuje tzv. duality gap. Obrázek 3.3 znázorňuje případ duality gap úlohy s jediným nerovnostním omezením a bez rovnostních omezení. Uvolněná funkce $v(y)$ pro $y \in \mathbb{R}$ je znázorněna na obrázku. Všimněme si, že podle definice je největší monotonní nerostoucí funkce která tvoří spodní obálku množiny G . Optimální hodnota účelové funkce primární úlohy je $v(0)$. Nejvyšší průsečík osy z se spodní tečnou rovinou množiny G udává hodnotu účelové funkce duální úlohy.



Obrázek 3.3: Grafické znázornění Duality gap.

3.4. Penalizační funkce

Penalizační funkce je metoda řešení optimalizačních úloh pomocí, které převedeme omezenou úlohu na úlohu neomezenou. Princip je jednoduchý, místo zohledňování podmínek přidáme penalizační člen, který zohledňuje míru jejich překročení. Penalizační člen však musí být dostatečně veliký, aby došlo jen k slabému porušení podmínek. V praxi to sebou ovšem nese jistá úskalí, a proto se častěji využívá postupného navyšování jeho hodnoty.

3.4.1. Vnější penalizace

Vnější penalizační funkce spojuje penále s porušením podmínek. Výraz "vnější" odkazuje na fakt, že penále se uplatní pouze mimo oblast přípustných řešení. Nejběžnější vnější penalizace je ta, která jako penále využívá kvadrát míry překročení, viz [4]. Mějme omezenou minimalizační úlohu

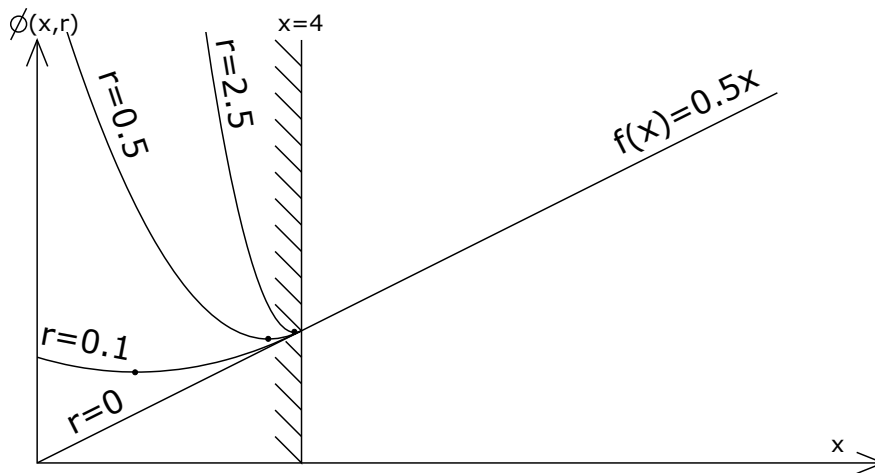
$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, l, \end{aligned}$$

nahradíme

$$\min \phi(\mathbf{x}, r) = f(\mathbf{x}) + r \sum_{j=1}^l h_j^2(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^m \langle g_i \rangle^2(\mathbf{x}) \quad (3.4.1)$$

$$r = r_1, r_2, \dots, r \rightarrow \infty$$

kde $\langle a \rangle$ znamená kladnou část a nebo $(a + |a|)/2$. S nerovnostními členy zacházíme jinak než s členy od rovnostních omezení, protože penalizace se přičte pouze při porušení podmínek. Kladný parametr r určuje významnost penalizačních členů. Zdá se logickým nastavit velmi vysokou hodnotu parametru r aby se zajistilo, že nedojde k porušení žádné podmínky. Jenže, jak bylo zmíněno výše, tento přístup vede k numerickým obtížím. Místo toho začneme s poměrně malou hodnotou parametru r , který postupně navyšujeme. Typická hodnota pro r_{i+1}/r_i je 5, viz [4]. Typický příklad vyobrazení $\phi(\mathbf{x}, r)$ jako funkce r je vyobrazena jako názorný příklad. Vidíme, že jak parametr r narůstá, minimum funkce



Obrázek 3.4: Vnější penalizační funkce pro $f = 0.5x$ s omezením $x - 4 \geq 0$.

ϕ se přibližuje k omezující hranici. Protože křivost ϕ v okolí narůstá, jsou vysoké hodnoty křivosti spojeny s vysokými hodnotami r , které často vedou k numerickým obtížím.

Užitím hodnot posloupnosti r , využijeme minima získaných při nízkých hodnotách r jako počáteční hodnotu při hledání s vyššími hodnotami r . Tedy špatné podmínění spojené s velkou křivostí vyvážíme dobrým počátečním bodem.

Je také důležité získat dobrý počáteční bod pro opakování optimalizace, jak zvýšíme r . Minimum pro předchozí hodnotu r je rozumnou volbou, ale může být i lepší. Bylo dokázáno, že poloha minima $\phi(\mathbf{x}, r)$ má asymptotickou formu

$$\mathbf{x}^*(r) = \mathbf{a} + \mathbf{b}/r, \quad \text{jak } r \rightarrow \infty. \quad (3.4.2)$$

Jak nalezneme optimum pro dvě hodnoty r , řekněme r_{i-1} a r_i , můžeme odhadnout vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} . S jejich pomocí predikujeme hodnotu $\mathbf{x}^*(r)$ pro následující hodnotu r . Lze dokázat, aby byla zachována rovnice (3.4.2), že vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} jsou dány vztahy, viz [4]

$$\mathbf{a} = \frac{c\mathbf{x}^*(r_{i-1}) - \mathbf{x}^*(r_i)}{c - 1},$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{x}^*(r_{i-1}) - \mathbf{a}]r_{i-1},$$

kde

$$c = r_{i-1}/r_i.$$

3.4.2. Rozšířená Lagrangeova penalizační funkce

Po našich dosavadních zjištěních přirozeně nastala otázka, jak navrhnout penalizační funkci, která nejen nalezne přesné řešení optimalizační úlohy pro konečnou hodnotu parametru r , ale bude i diferencovatelná. Rozšířená Lagrangeova penalizační funkce (ALAG od augmented Lagrangian penalty function), také známá jako multiplikátorová penalizační funkce, je jednou z takových penalizačních funkcí, viz [1].

Pro jednoduchost nejprve uvažujeme případy zahrnující pouze rovnostní omezení. Uvažujme úlohu $P \min f(\mathbf{x})$ s omezeními $h_i(\mathbf{x}) = 0$ pro $i = 1, \dots, l$. Víme, že pokud použijeme vnější penalizační funkci na tento problém, $\min f(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^l h_i^2(\mathbf{x})$, pak obvykle potřebujeme $r \rightarrow \infty$ k nalezení optima úlohy P . Možná by nás mohlo zajímat zda posunutím počátku penalizačních členů do vhodného $\Theta = (\Theta_i, i = 1, \dots, l)$, uvažujeme uvolněnou penalizační funkci $f(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^l (h_i(\mathbf{x}) - \Theta_i)^2$, je možné obdržet minimum původní úlohy pro konečnou hodnotu r . V rozepsaném tvaru je účelová funkce ve tvaru $f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^l 2r\Theta_i h_i(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^l h_i^2(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^l \Theta_i^2$. Označením $v_i = -2r\Theta_i$ pro $i = 1, \dots, l$ a vypuštěním konstantního členu, můžeme úlohu přepsat na

$$\phi_{ALAG}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, r) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l v_i h_i(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^l h_i^2(\mathbf{x}). \quad (3.4.3)$$

Nyní vidíme, že pokud $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})$ je primárně-duálním KKT řešením úlohy P , pak skutečně ve $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$,

$$\nabla_{\mathbf{x}} \phi_{ALAG}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}, r) = \left[\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^l \bar{v}_i \nabla h_i(\bar{\mathbf{x}}) \right] + 2r \sum_{i=1}^l h_i(\bar{\mathbf{x}}) \nabla h_i(\bar{\mathbf{x}}) \quad (3.4.4)$$

pro všechny hodnoty r . Toto nutně nebyl případ vnější penalizace, ledaže $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Proto bylo nutné aby $r \rightarrow \infty$ pro dosažení $\bar{\mathbf{x}}$ v limitním případě vnější penalizace.

Všimněme si, že funkce (3.4.3) je obyčejná Lagrangeova funkce rozšířená o kvadratický penalizační člen, proto používáme název rozšířená Lagrangeova penalizační funkce.

3.4. PENALIZAČNÍ FUNKCE

Věta 3.10. *Uvažujme optimalizační úlohu $P \min f(\mathbf{x})$ vzhledem k $h_i(\mathbf{x}) = 0$ pro $i = 1, \dots, l$ a nechť $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})$ je KKT řešení splňující postačující podmínky druhého řádu. Pak existuje \bar{r} , pro které platí $r \geq \bar{r}$ a ALAG penalizační funkce $\phi_{ALAG}(\cdot, \bar{\mathbf{v}}, r)$, definovaná pro $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$ také nabývá striktního lokálního minima v $\bar{\mathbf{x}}$. Zvláště pokud f je konverzní a $h_i, i = 1, \dots, l$ jsou afinní, pak každé minimální řešení $\bar{\mathbf{x}}$ úlohy P je také minimem $\phi_{ALAG}(\cdot, \bar{\mathbf{v}}, r)$, pro všechna $r \geq 0$.*

Nyní rozšíříme ALAG penalizační funkci i na nerovnostní omezení následujícím způsobem. Uvažujme úlohu $P \min f(\mathbf{x})$ vzhledem k $g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m$ a $h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, l$. Rozšíření předcházející teorie rozšířených Lagrangianů a metody multiplikátorů na tento případ, který již zahrnuje i nerovnosti, je hned hotov ekvivalentním zápisem nerovnic jako rovnic v následujícím tvaru $g_i(\mathbf{x}) + s_i^2 = 0, i = 1, \dots, m$. Nyní předpokládejme, že $\bar{\mathbf{x}}$ je KKT bodem úlohy P s Lagrangeovými multiplikátory $\bar{u}_i, i = 1, \dots, m$ a $\bar{v}_j, j = 1, \dots, l$ spojenými s nerovnostními a rovnostními omezeními a proto CS podmínka platí, jmenovitě $\bar{u}_i g_i(\bar{\mathbf{x}}), i = 1, \dots, m$ a $\bar{u}_i > 0$ pro každé $i \in I(\bar{\mathbf{x}}) = \{i : g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$. Navíc předpokládejme že platí $\nabla^2 L(\bar{\mathbf{x}})$, kde $L(\mathbf{x})$ je Lagrangeova funkce obsahující pouze aktivní omezení, je pozitivně definitní na kuželu $C = \{\mathbf{d} \neq 0 : \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} = 0, \text{ pro všechna } i \in I(\bar{\mathbf{x}}), \nabla h_i(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} = 0, \text{ pro všechna } i = 1, \dots, l\}$. Lze ověřit předpoklady věty 3.10, viz [5], pro úlohu $P' \min f(\mathbf{x})$ vzhledem k rovnostním omezením $g_i(\mathbf{x}) + s_i^2 = 0$, pro $i = 1, \dots, m$, a $h_j(\mathbf{x}) = 0$, pro $j = 1, \dots, l$ v řešení $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$, kde $\bar{s}_i^2 = -g_i(\bar{\mathbf{x}}), i = 1, \dots, m$. Proto pro dostatečně velké r řešení $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}})$ se ukáže být striktním lokálním minimem následující ALAG penalizační funkce v $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$:

$$f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m r [g_i(\mathbf{x}) + s_i^2] + \sum_{j=1}^l v_j h_j(\mathbf{x}) + r \left[\sum_{i=1}^m (g_i(\mathbf{x}) + s_i^2)^2 + \sum_{j=1}^l h_j^2(\mathbf{x}) \right]. \quad (3.4.5)$$

Zápis (3.4.5) může být zjednodušen následujícím způsobem. Pro daný penalizační parametr $r > 0$ nechme $\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ reprezentovat minimum (3.4.5) na (\mathbf{x}, \mathbf{s}) danými Lagrangeovými multiplikátory (\mathbf{u}, \mathbf{v}) . Nyní výhodněji zapišme (3.4.5):

$$f(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^m \left[g_i(\mathbf{x}) + s_i^2 \frac{u_i}{2r} \right]^2 - \sum_{j=1}^m \frac{u_i^2}{4r} + \sum_{j=1}^l v_j h_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^l h_j^2(\mathbf{x}). \quad (3.4.6)$$

Proto při výpočtu $\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ můžeme minimalizovat (3.4.6) na (\mathbf{x}, \mathbf{s}) tak, že nejprve minimalizujeme $[g_i(\mathbf{x}) + s_i^2 + (u_i/2r)]$ přes s_i z hlediska \mathbf{x} pro každé $i = 1, \dots, m$ a pak minimalizovat výsledný výraz přes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Tento úkol je lehce dosažitelný dosazením $s_i^2 = -[g_i(\mathbf{x}) + (u_i/2r)]$ pokud je nezáporná a nulu jinak. Tím získáme

$$\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \min_{\mathbf{x}} \left\{ f(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^m \left(\max \left\{ g_i(\mathbf{x}) + \frac{u_i}{2r}, 0 \right\} \right)^2 - \sum_{i=1}^m \frac{u_i^2}{4r} + \sum_{j=1}^l v_j h_j(\mathbf{x}) + r \sum_{j=1}^l h_j^2(\mathbf{x}) \right\} \quad (3.4.7)$$

$$= \min_{\mathbf{x}} \{ \phi_{ALAG}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \}. \quad (3.4.8)$$

3.4.3. Vnitřní a rozšířená vnitřní penalizace

U vnější penalizace, omezení přispívala do penalizačního členu jen když byla porušena. Důsledkem bylo, že řešení se pohybovalo v množině nepřipustných řešení. Pokud byla

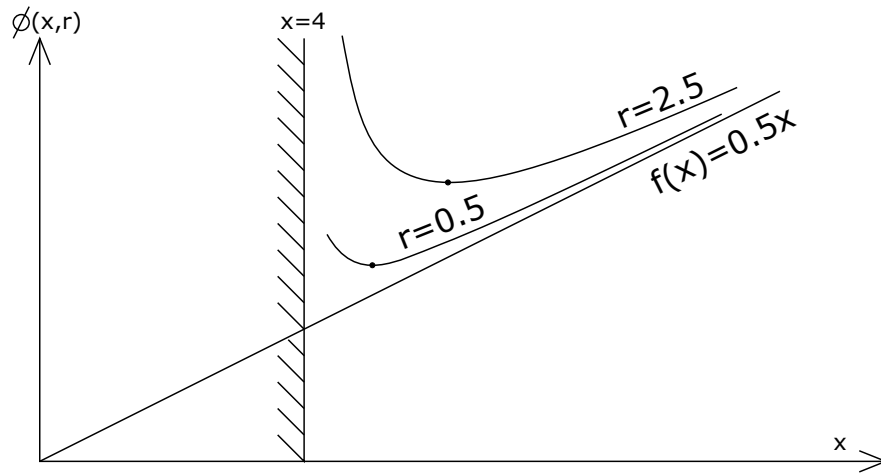
optimalizace ukončena předtím, než r dosáhlo vysokých hodnot, výsledné řešení bylo zbytečné. Pokud úloha obsahuje pouze nerovnostní omezení, je možné zavést vnitřní penalizační funkci (viz též bariérová funkce [1]), která udržuje řešení v množině přípustných řešení, viz [4]. Běžná forma vnitřní penalizační funkce nahradí úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ & g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

úlohou

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi(\mathbf{x}, r) = f(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^m 1/g_i(\mathbf{x}) \\ & r = r_1, r_2, \dots, r \rightarrow 0, \quad r_i > 0. \end{aligned}$$

Penalizační člen odpovídá $1/g_i$ a nabude nekonečné hodnoty na hranici přípustné množiny,



Obrázek 3.5: Vnitřní penalizační funkce pro $f = 0.5x$ s omezením $x - 4 \geq 0$.

kde tvoří hranici. Předpokládáme, že hledání je zúženo na přípustnou oblast. Jinak penále nabude záporných hodnot, což nedává smysl.

Zatímco vnitřní penalizační funkce má oproti vnější penalizační funkci výhodu, že dává sérii přípustných řešení, ale vyžaduje také přípustný počáteční bod. Bohužel je mnohdy těžké takový přípustný startovací bod nalézt. Také z důvodů užití aproximace je docela běžné pro optimalizační proces, že se "zatoulá" do nepřípustné oblasti. Z těchto důvodů by bylo výhodou využít kombinace vnitřní a vnější penalizační funkce, která se nazývá rozšířená vnitřní penalizační funkce, viz [4]. Například kvadraticky prodloužená vnitřní penalizační funkce

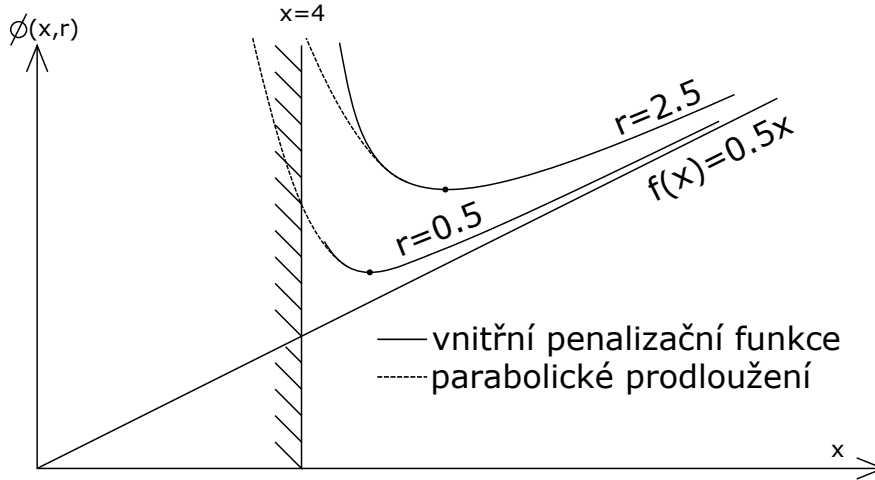
$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, r) &= f(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^m q(g_i), \\ r &= r_1, r_2, \dots, r \rightarrow 0, \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

kde

$$q(g_i) = \begin{cases} 1/g_i & \text{pro } g_i \geq g_0 \\ 1/g_0[3 - 3(g_i/g_0) + (g_i/g_0)^2] & \text{pro } g_i < g_0. \end{cases} \tag{3.4.10}$$

Je možné ověřit, že $q(g_i)$ má spojitě derivace do druhého řádu. Parametr přechodu g_0 , který určuje hranici mezi vnitřní a vnější částí penalizačního členu, musí být zvolen tak,

3.4. PENALIZAČNÍ FUNKCE



Obrázek 3.6: Prodloužená vnitřní penalizační funkce pro $f = 0.5x$ s omezením $x - 4 \geq 0$.

aby penále spojené s omezením, $r\phi(g_i)$ nabylo nekonečna pro záporné g_i , jak se r blíží nule. Z toho vyplývá požadavek

$$r/g_0^3 \rightarrow \infty, \text{ jak } r \rightarrow 0.$$

Toho může být dosaženo takto

$$g_0 = kr^{1/2},$$

kde k je konstanta.

Jako pro vnější penalizační funkci je možné získat vztah asymptotických souřadnic minima funkce ϕ jako, viz [4],

$$\mathbf{x}^*(r) = \mathbf{a} + \mathbf{b}r^{1/2}, \quad \text{jak } r \rightarrow 0.$$

\mathbf{a} , \mathbf{b} mohou být odhadnuty jakmile minimalizace byla ukončena pro dvě hodnoty r takto

$$\mathbf{a} = \frac{c^{1/2}\mathbf{x}^*(r_{i-1}) - \mathbf{x}^*(r_i)}{c^{1/2} - 1},$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{x}^*(r_{i-1}) - \mathbf{a}}{r_{i-1}^{1/2}},$$

kde $c = r_i/r_{i-1}$, viz [4].

4. Stochastická optimalizace

Cílem stochastické optimalizace je nalezení optimálního řešení úlohy zahrnující náhodná data a k popsání této náhodnosti nám poslouží znalost pravděpodobnosti a statistiky, viz [8].

Oblast stochastické optimalizace vznikla v polovině minulého století. Zatímco bylo rychle jasné, že přítomnost náhody v optimalizačních modelech vytváří potřebu nových formulací úloh, uplynulo více let než byly formulovány a analyzovány základní modely stochastické optimalizace, viz [9]. Nyní teorie stochastické optimalizace nabízí množství modelů popisujících náhodnost dat v optimalizačních úlohách: úlohy pravděpodobnostních omezení, dvou a více úroňové modely (používá se často také terminologie dvou a více stupňové modely) a modely zahrnující míru rizika.

Předtím než budou popsány základní modely, uvedeme základní pojmy z pravděpodobnosti.

4.1. Pravděpodobnostní prostor a náhodné veličiny

Pokud parametry úloh mohou být považovány za nejisté, jsou reprezentovány jako náhodné veličiny, viz [8]. Produkční a distribuční náklady typicky závisí na ceně pohonných hmot, která je náhodná nebo budoucí poptávka závisí na nejistých podmínkách trhu.

Nejistota je reprezentována ve smyslu elementárních náhodných jevů označených ω . Množina všech elementárních jevů je označena Ω . Množina relevantních výsledků je zřejmě závislá na řešené úloze. Také není třeba přesně definovat tyto výsledky, protože naší snahou je určit jejich dopad na některé (náhodné) veličiny.

Výsledky mohou být sestaveny do podmnožin Ω , které jsou nazývány náhodnými jevy. Množinu náhodných jevů označíme \mathcal{A} . Například, pokud Ω obsahuje šest možných výsledků hodu kostkou, pak \mathcal{A} obsahuje kombinace výsledků, jako například sudá čísla, výsledek menší nebo roven čtyřem, a tak podobně.

Konečně každé události $A \in \mathcal{A}$ je přiřazena hodnota $P(A)$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ a $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ jestliže $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Trojice (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor a jeho obecná definice (uvedli jsme zde pouze vlastnosti pro konečnou množinu Ω , se kterou budeme převážně pracovat) je např. v [8].

V případech stochastické optimalizace občas nastává situace, kdy popis náhodných veličin je úzce spjat s Ω . V takových případech jsou elementy $\omega \in \Omega$ použity na popsání scénářů. Všechny náhodné veličiny pak závisí na těchto konečně mnoha scénářích.

Definice 4.1. *Náhodná veličina je borelovsky měřitelná (viz [8]) reálná funkce $\xi(\omega)$ definovaná na množině elementárních jevů Ω . Každému elementárnímu jevu ω z množiny elementárních jevů Ω přiřazuje právě jedno reálné číslo $\xi(\omega) = x$. Obor hodnot veličiny ξ je množina $\Xi = \{x = \xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$, viz [8].*

Pro konkrétní náhodnou veličinu ξ definujeme její distribuční funkci $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$, nebo přesněji $F_\xi(x) = P(\{\omega \mid \xi(\omega) \leq x\})$. Uvažujme dva hlavní případy. První případ, když diskrétní náhodná veličina nabývá konečně, nebo spočetně mnoha různých hodnot. Je nejlépe popsána svojí pravděpodobnostní funkcí, která je seznamem možných hodnot, ξ^k , $k \in K$, s příslušnými pravděpodobnostmi,

$$f(\xi^k) = P(\xi = \xi^k) \text{ za podmínky } \sum_{k \in K} p(\xi^k) = 1.$$

4.2. FORMULACE STOCHASTICKÉ ÚLOHY

Spojité náhodné veličiny může být často popsána pomocí funkce hustoty $f(\xi)$. Pravděpodobnost, že ξ je z intervalu $\langle a, b \rangle$ obdržíme

$$P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(\xi) d\xi,$$

kde $F(\cdot)$ je distribuční funkce. Oproti diskrétnímu případu je hodnota $P(\xi = a)$, spojitě náhodné veličiny, vždy rovna nule. Funkce hustoty pravděpodobnosti $f(\xi)$ musí splňovat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1.$$

Střední hodnota náhodné veličiny se spočítá

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k \in K} \xi^k p(\xi^k)$$

v diskrétním případě, nebo

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi) d\xi$$

v případě spojitém. Rozptyl náhodné veličiny je

$$\text{var}\xi = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^2].$$

Střední hodnota ξ^r se nazývá r -tý obecný moment ξ a značí se

$$\xi^{(r)} = \mathbb{E}[\xi^r].$$

4.2. Formulace stochastické úlohy

Základní úlohu stochastické optimalizace definujeme takto

$$\begin{aligned} & \text{„min“ } f(\mathbf{x}, \xi) \\ & g_i(\mathbf{x}, \xi) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \mathbf{x} \in X_0, \end{aligned}$$

kde X_0 je podmnožina \mathbb{R}^n a ξ je náhodný vektor $\xi : \Omega \rightarrow \Xi \subset \mathbb{R}^K$.

Navíc je třeba určit význam „min“ $f(\mathbf{x}, \xi)$ vzhledem k tomu, že f závisí na ξ symbol minimalizace nedává příliš smysl, protože pro různá pozorování náhodného parametru bychom obdrželi různá optimální řešení bez náznaku, které je „lepší“ než ostatní. Jedním ze způsobů jak se těmito komplikacím vyhnout je optimalizovat účelovou funkci v průměru, viz [8]. To vede na následující formulaci

$$\min \mathbb{E}f(\mathbf{x}, \xi).$$

Pokud náhoda vstoupí do některých našich nerovnostních omezení

$$g_i(\mathbf{x}, \xi) \leq 0, \tag{4.2.1}$$

pak musíme specifikovat přípustnou množinu řešení, protože některá \mathbf{x} mohou tyto podmínky splňovat pro některé hodnoty ω a pro jiné zase porušovat. Často je nereálné požadovat splnění podmínek (4.2.1) pro všechny $\omega \in \Omega$.

Některé přístupy mohou být použity pro smysluplné zavedení pojmu přípustnosti. Jedním z těchto přístupů je uplatnění střední hodnoty

$$\mathbb{E}g_i(\mathbf{x}, \xi) \leq 0.$$

Tento přístup obvykle využijeme v situacích, kdy máme několik účelových funkcí a my některé z nich dáme do omezení.

Jiným přístupem, jak zavést přípustnou množinu, je zavedením omezení na pravděpodobnost dodržení podmínek (4.2.1)

$$P(g_i(\mathbf{x}, \xi) \leq 0) \geq 1 - \alpha$$

s pevně stanovenou hodnotou $\alpha \in (0, 1)$.

4.3. Dvouúrovňové lineární úlohy s pevným postihem

Dvouúrovňová lineární úloha stochastické optimalizace s pevným postihem je definovaná takto, viz [2]

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbb{E}_\xi[\min \mathbf{q}(\omega)^T \mathbf{y}(\omega)] \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ T(\omega)\mathbf{x} + W\mathbf{y}(\omega) = \mathbf{h}(\omega), \\ \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \geq 0, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m_1}$ jsou známé vektory a A , W jsou známé matice o rozměrech $m_1 \times n_1$ a $m_2 \times n_2$. W je matice postihu, o které předpokládáme, že je konstantní.

Pro každé ω je $T(\omega)$ matice o rozměrech $m_2 \times n_1$, $\mathbf{q}(\omega) \in \mathbb{R}^{n_2}$ a $\mathbf{h}(\omega) \in \mathbb{R}^{m_2}$. Se skládáním stochastických částí úlohy získáme vektor $\xi^T(\omega) = (\mathbf{q}(\omega)^T, \mathbf{h}(\omega)^T, T_{1.}(\omega), \dots, T_{m_2.}(\omega))$ o $N = n_2 + m_2 + (m_2 \times n_1)$ složkách, kde $T_{i.}(\omega)$ je i -tý řádek technologické matice $T(\omega)$. \mathbb{E}_ξ představuje střední hodnotu vzhledem ke ξ . Uvažujme, že $\Xi \subseteq \mathbb{R}^N$ je tzv. nosič ξ , to jest nejmenší uzavřená podmnožina \mathbb{R}^N , pro kterou platí $P(\xi \in \Xi) = 1$.

Úloha (4.3.1) je ekvivalentní k takzvanému deterministickému ekvivalentu úlohy

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

kde

$$\mathcal{Q}(x) = \mathbb{E}_\xi \mathcal{Q}(\mathbf{x}, \xi(\omega)) \tag{4.3.3}$$

a

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \xi(\omega)) = \min_{\mathbf{y}} \{\mathbf{q}(\omega)^T \mathbf{y} | W\mathbf{y} = \mathbf{h}(\omega) - T(\omega)\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0\}. \tag{4.3.4}$$

Tento zápis jasně ukazuje řadu událostí v úloze s postihem. Rozhodnutí prvního stupně, \mathbf{x} , je učiněno před realizací náhodné veličiny ξ . V druhé úrovni již realizace ξ je známa a můžeme učinit nápravné kroky, nebo uplatnit postih \mathbf{y} . Nicméně tyto nápravné kroky jsou zohledněny během rozhodnutí prvního stupně. Tyto budoucí vlivy jsou měřeny hodnotou postihové funkce $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$, která počítá střední hodnotu rozhodnutí \mathbf{x} .

4.3. DVOUÚROVNĚVÉ LINEÁRNÍ ÚLOHY S PEVNÝM POSTIHEM

4.3.1. Přípustné množiny

Pro pevné \mathbf{x} a ξ je hodnota $Q(\mathbf{x}, \xi)$ druhé úrovně modelu dána

$$Q(\mathbf{x}, \xi) = \min_{\mathbf{y}} \{ \mathbf{q}(\omega)^T \mathbf{y} \mid W(\omega) \mathbf{y} = \mathbf{h}(\omega) - T(\omega) \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0 \}. \quad (4.3.5)$$

Pokud účelová funkce matematického modelu (4.3.5) je neomezená zdola, nebo model nemá přípustné řešení, úlohy druhé úrovně definujeme $-\infty$, nebo $+\infty$. Nejprve uvažujme střední hodnotu postihové funkce, která je dána (4.3.3). Prvně uvažujme ξ jako konečnou diskrétní náhodnou veličinu, jmenovitě $\xi \in \Xi$, kde Ξ je konečná nebo spočetná množina. Pak je hodnota funkce druhé úrovně váženým součtem hodnot $Q(\mathbf{x}, \xi)$ pro možné realizace ξ . Pro další diskuzi zavedeme tuto konvenci $+\infty + (-\infty) = +\infty$. To odpovídá zamítnutí jakéhokoliv rozhodnutí prvního stupně, které by mohlo vést k nedefinované nápravné akci, přestože pro některé realizace náhodného vektoru by vedly k nekonečně nízkým nákladům. Mějme množinu $K_1 = \{ \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0 \}$ určenou pevnými omezeními, těmi které nezávisí na realizaci náhodného vektoru a množinu $K_2 = \{ \mathbf{x} \mid Q(\mathbf{x}) < \infty \}$, která je přípustnou množinou rozhodnutí druhé úrovně. Nyní můžeme definovat deterministický ekvivalent úlohy následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + Q(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in K_1 \cap K_2. \end{aligned}$$

Z praktického pohledu, není nezbytně nutné znát kompletní oblast na které je $Q(\mathbf{x})$ konečná. Na druhé straně je požadována schopnost určit, jestli konkrétní rozhodnutí první úrovně \mathbf{x} vede ke konečné hodnotě druhé úrovně bez nutnosti počítat tuto hodnotu. Definice K_2 není z tohoto hlediska užitečná. Proto uvažujme alternativní definici

$$K_2(\xi) = \{ \mathbf{x} \mid Q(\mathbf{x}, \xi) < +\infty \}$$

je přípustná množina jednotlivých realizací náhodné veličiny

$$\begin{aligned} K_2^P &= \{ \mathbf{x} \mid \forall \xi \in \Xi, \\ &\quad \mathbf{y} \geq 0, W\mathbf{y} = \mathbf{h} - T\mathbf{x} \} \\ &= \bigcap_{\xi \in \Xi} K_2(\xi). \end{aligned}$$

Rozhodnutí \mathbf{x} patří do množiny K_2^P , jestliže pro každou možnou realizaci náhodného vektoru ξ může být učiněno přípustné rozhodnutí druhé úrovně \mathbf{y} .

Věta 4.1.

1. Pro každé ξ je množina $K_2(\xi)$ uzavřeným konvexním mnohostěnem, proto je množina K_2^P uzavřená a konvexní.
2. Pokud je Ξ konečná, pak je K_2^P také mnohostěnem a shoduje se s K_2 .

Důkaz. Pro každé ξ je $K_2(\xi)$ definována množinou lineárních omezení, což stačí k dokázání (1). Konkrétní \mathbf{x} patří do K_2 pokud je $Q(\mathbf{x})$ ohraničená shora. Protože $Q(\mathbf{x})$ kladně vážený součet konečně mnoha hodnot $Q(\mathbf{x}, \xi)$ a kvůli naší konvenci, $+\infty + (-\infty)$, je $Q(\mathbf{x})$ ohraničená shora pouze tehdy, pokud každá $Q(\mathbf{x}, \xi)$ je ohraničená shora, z čehož vyplývá, že \mathbf{x} patří do $K_2(\xi)$, pro všechna ξ z toho opět vyplývá \mathbf{x} , že patří do K_2^P . Obdobně, pokud \mathbf{x} patří do K_2^P , pak $Q(\mathbf{x}, \xi)$ je ohraničená shora pro všechny ξ , z čehož plyne $Q(\mathbf{x})$ je ohraničená shora a \mathbf{x} patří do K_2 . \square

Věta 4.2. *Když W je konstantní a ξ má konečný druhý moment:*

- K_2 je uzavřená a konvexní,
- *Když T je konstantní, K_2 je mnohostěn,*
- *Nechť Ξ_T je nosič rozdělení T . Pokud $\mathbf{h}(\xi)$ a $T(\xi)$ jsou nezávislé a Ξ_T je mnohostěn, pak i K_2 je mnohostěnem.*

4.3.2. Hodnota funkce druhé úrovně

Nejprve určíme vlastnosti $Q(\mathbf{x}, \xi)$, předpokládejme že její hodnota není $-\infty$.

Věta 4.3. *Pro stochastickou úlohu s pevným postihem $Q(\mathbf{x}, \xi)$ je*

- *po částech lineární konvexní funkce (\mathbf{h}, T) ;*
- *po částech lineární konkávní funkce \mathbf{q} ;*
- *po částech lineární konvexní funkce \mathbf{x} , pro všechny \mathbf{x} z $K = K_1 \cap K_2$.*

Věta 4.4. *Pro stochastickou úlohu s pevným postihem, kde ξ má konečné druhé momenty platí:*

- *$Q(\mathbf{x})$ je Lipschitzovsky konvexní a nabývá konečných hodnot na K_2 .*
- *Když ξ je konečná, $Q(\mathbf{x})$ je po částech lineární.*
- *Když $F(\xi)$ je absolutně spojitě rozdělení pravděpodobnosti, $Q(\mathbf{x})$ je diferencovatelná na K_2 .*

4.3.3. Speciální případy postihu

Ve speciálních případech mají přípustná množina a účelová funkce speciální vlastnosti, které jsou užitečné během výpočtu. Výhodou je, když každé řešení \mathbf{x} , splňující $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, má rovněž přípustné dokončení druhé úrovně. Jinými slovy $K_1 \subset K_2$. V takovém případě říkáme, že stochastická úloha má relativně kompletní postih (případně relativně úplná kompenzace).

Ačkoliv relativně kompletní postih je v praxi velmi užitečná vlastnost, její dokázání je obtížné, protože vyžaduje znalost množin K_1 a K_2 . Speciální případ relativně kompletního postihu může být určen ze struktury matice W . Tato forma, nazývaná kompletní postih, je splněna pokud existuje $\mathbf{y} \geq 0$ taková, že $W\mathbf{y} = \mathbf{t}$ pro všechny $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{m_2}$.

Speciální případ kompletního postihu nabízí další výpočetní výhody při řešení úloh stochastické optimalizace. Je nazýván jednoduchý postih. Pro úlohu s jednoduchým postihem $W = [I, -I]$, \mathbf{y} je rozděleno odpovídajícím způsobem na $(\mathbf{y}^{+T}, \mathbf{y}^{-T})$ a $\mathbf{q} = (\mathbf{q}^+, \mathbf{q}^-)$. Všimněme si, že v tomto případě optimální hodnoty $y_i^+(\omega), y_i^-(\omega)$ jsou určeny pouze znaménkem $h_i(\omega) - T_i(\omega)x$ za předpokladu, že $q_i^+ + q_i^- \geq 0$ s pravděpodobností jedna.

Věta 4.5. *Předpokládejme, že dvouúrovňová úloha (4.3.1) je řešitelná a má jednoduchý postih a ξ má konečné druhé momenty. Pak $Q(\mathbf{x})$ má konečnou hodnotu, tehdy a jen tehdy když $q_i^+ + q_i^- \geq 0$ s pravděpodobností rovnou jedné.*

4.3. DVOUÚROVNĚVÉ LINEÁRNÍ ÚLOHY S PEVNÝM POSTIHEM

Proto jsme předpokládali, že $q_i^+ + q_i^- \geq 0$ s pravděpodobností jedna, abychom mohli zapsat $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ jako $\sum_{i=1}^{m_2} \mathcal{Q}_i(\mathbf{x})$, kde $\mathcal{Q}_i(\mathbf{x}) = \mathbb{E}_\omega[Q_i(\mathbf{x}, \xi(\omega))]$ a $Q_i(\mathbf{x}, \xi(\omega)) = q_i^+(\omega)(h_i(\omega) - T_{i\cdot}(\omega)\mathbf{x})^+ + q_i^-(\omega)(-h_i(\omega) + T_{i\cdot}(\omega)\mathbf{x})^+$. Když \mathbf{q} a T jsou pevné, pak tato charakterizace \mathcal{Q} jí umožňuje zapsat jako separabilní funkci ve zbývajících náhodných složkách h_i . Předpokládejme, že h_i má průměr \bar{h}_i , hustotu pravděpodobnosti f_i , jí odpovídající distribuční funkci F_i a $q_i = q_i^+ + q_i^-$. Pak můžeme $\mathcal{Q}_i(\mathbf{x})$ zapsat jako

$$\mathcal{Q}_i(\mathbf{x}) = q_i^+ \bar{h}_i - (q_i^+ - q_i F_i(T_{i\cdot}\mathbf{x}))T_{i\cdot}\mathbf{x} - q_i \int_{h_i \leq T_{i\cdot}\mathbf{x}} h_i f_i(h_i) dh_i. \quad (4.3.6)$$

Zvláštní význam v optimalizaci má subdiferenciál této funkce, který má následující formu:

$$\partial \mathcal{Q}_i(\mathbf{x}) = \{\pi_i(T_{i\cdot})^T | -q_i^+ + q_i F_i(T_{i\cdot}\mathbf{x}) \leq \pi_i \leq -q_i^+ + q_i F_i^+(T_{i\cdot}\mathbf{x})\}, \quad (4.3.7)$$

kde $F_i^+(h) = \lim_{t \downarrow h} F_i(t)$.

4.3.4. Podmínky optimality

V této části budeme uvažovat o podmínkách optimality pro úlohy stochastické optimalizace. Cílem popisu těchto podmínek je ukázat speciální podmínky, které mohou být použity na stochastické úkoly a ukázat, jak se stochastické úlohy liší od ostatních úloh. Obecně budou uvedeny další předpoklady, které zaručí nutné a postačující podmínky pro dvouúrovňové stochastické lineární úlohy, viz [2].

Deterministický ekvivalent úlohy (4.3.2) poskytuje rámec podmínek optimality, ale vyvolává několik otázek.

- Kdy je řešení úlohy (4.3.2) dosažitelné?
- Jakou formu mají podmínky optimality, a jak mohou být zjednodušeny?
- Jak je optimální řešení úlohy (4.3.2) stabilní vůči změnám parametrů a rozdělení pravděpodobnosti?
- Jaké typy duálních úloh mohou být formulovány k úloze (4.3.2) a poskytují meze na optimální hodnoty?

Otázkou je, kdy řešení úlohy (4.3.2) je skutečně obdrženo, zda hodnota účelové funkce je konečná a dosažena nějakou hodnotou \mathbf{x} .

Následující věta dává postačující podmínku, která zaručuje existenci řešení úlohy (4.3.2). Dále bude použito rc k označení kuželu poklesu, $\{\mathbf{v} | \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v} \in S, \text{ pro všechny } \lambda \geq 0 \text{ a } \mathbf{u} \in S\}$, množiny S .

Věta 4.6. *Předpokládejme, že náhodná veličina ξ má konečné druhé momenty a jednu z následujících vlastností:*

- *přípustná množina K je ohraničená; nebo*
- *postihová funkce \mathcal{Q} je dokonce lineární ve všech směrech recese K , to je $\mathcal{Q}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) = \mathcal{Q}(\mathbf{x} + \bar{\lambda} \mathbf{v}) + (\lambda - \bar{\lambda}) \text{rc}\mathcal{Q}(\mathbf{v})$ pro některé $\bar{\lambda}$ (závisících na \mathbf{x}), všechny $\lambda \geq \bar{\lambda}$ a některé konstantní hodnoty poklesu $\text{rc}\mathcal{Q}(\mathbf{v})$, pro všechny \mathbf{v} takové, že $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v} \in K$ pro všechny $\mathbf{x} \in K$ a λ .*

Pak pokud má úloha (4.3.2) konečnou hodnotu účelové funkce, tak je dosažitelná některým $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Nyní předpokládejme, že optimální řešení je dosažitelné. Z optimalizačního hlediska bychom rádi popsali charakteristiky takových bodů. Obecný deterministický ekvivalent úlohy nám dává následující výsledek ve tvaru Krush-Kuhn-Tackerových podmínek.

Věta 4.7. *Předpokládejme, že (4.3.2) má konečnou hodnotu účelové funkce. Pak řešení $\mathbf{x}^* \in K_1$, je optimem úlohy (4.3.2) pouze tehdy když existují některá $\lambda^* \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\mu^* \in \mathbb{R}_+^{n_1}$, $\mu^{*T} \mathbf{x}^* = 0$, splňující*

$$-\mathbf{c} + A^T \lambda^* + \mu^* \in \partial Q(\mathbf{x}^*). \quad (4.3.8)$$

Tento výsledek může být zkombinován s našimi předchozími výsledky pro jednoduché postihové funkce a obdržíme následující podmínky pro tyto úlohy.

Důsledek 4.7.1. *Předpokládejme úlohu (4.3.1) s jednoduchou postihovou funkcí a konečnou hodnotou účelové funkce. Pak $\mathbf{x}^* \in K_1$ je optimem úlohy (4.3.2) odpovídající této úloze, jen a pouze tehdy, když existují nějaké $\lambda^* \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\mu^* \in \mathbb{R}_+^{n_1}$, $\mu^{*T} \mathbf{x}^* = 0$, π_i^* splňující $-(q_i^+ - q_i F_i(T_i \mathbf{x}^*)) \leq \pi_i^* \leq -(q_i^+ - q_i F_i^+(T_i \mathbf{x}^*))$ a*

$$-\mathbf{c} + A^T \lambda^* + \mu^* - (\pi^*)^T T = 0. \quad (4.3.9)$$

Zřejmě pokud Q je diferencovatelná, pak můžeme $\partial Q(\mathbf{x}^*)$ nahradit $\nabla Q(\mathbf{x}^*)$ a obdržíme:

$$\mathbf{c} + \nabla Q(\mathbf{x}^*) = A^T \lambda^* + \mu^* \quad (4.3.10)$$

místo (4.3.8).

Hlavní obtíží je charakterizace ∂Q , protože už jen vyčíslení této funkce je obtížné. Toto vyčíslení je rozložitelná na sub-gradienty postihu pro každou realizaci ξ , viz [8].

Věta 4.8. *Když $\mathbf{x} \in K$, pak*

$$\partial Q(\mathbf{x}) = \mathbb{E}_\omega \partial Q(\mathbf{x}, \xi(\omega)) + N(K_2, \mathbf{x}), \quad (4.3.11)$$

kde $N(K_2, \mathbf{x}) = \{\mathbf{v} | \mathbf{v}^T \mathbf{y} \leq 0, \forall \mathbf{y} \text{ takových, že } \mathbf{x} + \mathbf{y} \in K_2\}$, normální kužel ke K_2 v \mathbf{x} .

Tato věta skutečně poskytuje základ pro výsledky o diferencovatelnosti Q . Dále si povšimněme, že pokud úloha má relativně kompletní postih, pak každé \mathbf{y} splňující $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in K_1$ musí také splňovat $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in K_2$. Proto $N(K_2, \mathbf{x}) \subset N(K_1, \mathbf{x}) = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} = A^T \lambda + \mu, \mu^T \mathbf{x} = 0, \mu \geq 0\}$. Z toho plyne následující důsledek vět (4.7) a (4.8).

Důsledek 4.8.1. *Jestliže (4.3.2) má relativně kompletní postih, pak \mathbf{x}^* je optimem (4.3.2) jen a pouze tehdy, když existují $\lambda^* \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\mu^* \in \mathbb{R}_+^{n_1}$, $\mu^{*T} \mathbf{x}^* = 0$, splňující*

$$-\mathbf{c} + A^T \lambda^* + \mu^* \in \mathbb{E}_\omega \partial Q(\mathbf{x}, \xi(\omega)). \quad (4.3.12)$$

4.4. Úlohy s pravděpodobnostním omezením

V některých modelech nemusí být omezení splněna téměř vždy, jak jsme doposud uvažovali, ale musí být splněny s určitou mírou pravděpodobnosti, viz [8]. Tato pravděpodobnostní omezení jsou ve tvaru

$$P(A^i(\omega)\mathbf{x} \geq h^i(\omega)) \geq \alpha^i, \quad (4.4.1)$$

kde $0 < \alpha^i < 1$ a $i \in I$, I je množina indexů omezení. Samozřejmě můžeme tyto omezení vyjádřit ve tvaru střední hodnoty $\mathbb{E}_\omega(f_i(\omega, \mathbf{x}(\omega))) \geq \alpha^i$, kde f_i je indikátor $\{\omega | A^i(\omega)\mathbf{x} \geq h^i(\omega)\}$, ale pak bychom museli pracovat s nespojitou funkcí.

V úlohách s pravděpodobnostními omezeními je účelová funkce často ve tvaru střední hodnoty, také rozptylu výsledku nebo pravděpodobnosti nastoupení jevu. Jiná varianta zahrnuje účelovou funkci, která je kvantilem náhodné funkce, viz [2].

Hlavní výsledky úloh s pravděpodobnostními omezeními odkazují na typy deterministických ekvivalentů omezení ve tvaru (4.4.1). Uvedené deterministické ekvivalenty těchto omezení a účelových funkcí mohou být za vhodných předpokladů konvexní.

Hlavním cílem u úloh s pravděpodobnostními omezeními je tedy určit deterministický ekvivalent a jeho vlastnosti. Z důvodu zachování konzistence s předchozí částí mějme

$$K_1^i(\alpha^i) = \{\mathbf{x} | P(A^i(\omega)\mathbf{x} \geq h^i(\omega)) \geq \alpha^i\},$$

kde $0 < \alpha^i < 1$ a $\cap_i K_1^i = K_1$. Bohužel, $K_1^i(\alpha^i)$ nemusí být konvexní, natož souvislé. Uvažujme příklad $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $P[\omega_1] = P[\omega_2] = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} A^i(\omega_1) &= A^i(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ h^i(\omega_1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ h^i(\omega_2) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$. Pro $0 < \alpha^i \leq \frac{1}{2}$, $K_1^i(\alpha^i) = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle$. Všimněme si, že pokud budeme požadovat $\frac{1}{2} \leq \alpha^i \leq 1$, pak bude tato úloha neřešitelná, jelikož neexistuje přípustné řešení pro ω_1 i ω_2 .

Když každé i odpovídá nezávislému lineárnímu omezení a A^i je konstantní řádkový vektor, který bude dále značen A_i , pak získání deterministického ekvivalentu podmínky (4.4.1) je poměrně přímočaré. V tomto případě $P(A_i\mathbf{x} \geq h_i(\omega)) = F_i(A_i\mathbf{x})$, kde F_i je distribuční funkce h_i . Pak platí $K_1^i(\alpha^i) = \{\mathbf{x} | F_i(A_i\mathbf{x}) \geq \alpha^i\}$, čímž obdržíme odpovídající deterministickou formu. To odpovídá požadavku na interval spolehlivosti s hladinou významnosti α na kterém je \mathbf{x} přípustným řešením.

Jedním z hlavních výsledků úloh s pravděpodobnostním omezením je to, že velká třída pravděpodobnostních měr na $\mathbf{h}(\omega)$ (pro pevné A) vede na uzavřené konvexní $K_1(\alpha)$. Pravděpodobnostní míra P je v této třídě, pokud je kvazikonvexní, viz [9].

Věta 4.9. *Jestliže je pravděpodobnostní míra P generovaná hustotou pravděpodobnosti $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pro kterou platí $f^{-\frac{1}{n}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je konvexní, n je dimenze \mathbb{R}^n , pak pravděpodobnostní míra P je kvazikonkávní, tj. pro jakékoliv konvexní podmnožiny A , B množiny \mathbb{R}^n a $0 < \lambda < 1$ platí nerovnost*

$$P(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \min(P(A), P(B)).$$

Věta 4.10. *Předpokládejme A je konstantní a \mathbf{h} má kvazikonkávní pravděpodobnostní míru P . Pak $K_1(\alpha)$ je uzavřená konvexní množina pro $0 \leq \alpha \leq 1$.*

Důkaz. Mějme $\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{h} | A\mathbf{x} \geq \mathbf{h}\}$. Předpokládejme $\mathbf{x}(\lambda) = \lambda\mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2$ kde $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in K_1(\alpha)$. Předpokládejme $\mathbf{h}^1 \in \mathcal{H}(\mathbf{x}^1)$ a $\mathbf{h}^2 \in \mathcal{H}(\mathbf{x}^2)$. Pak $\lambda\mathbf{h}^1 + (1-\lambda)\mathbf{h}^2 \leq A\mathbf{x}(\lambda)$ tedy $\mathcal{H}(\mathbf{x}(\lambda)) \supset \lambda\mathcal{H}(\mathbf{x}^1) + (1-\lambda)\mathcal{H}(\mathbf{x}^2)$. Proto $P(\{A\mathbf{x}(\lambda) \geq \mathbf{h}\}) = P(\mathcal{H}(\mathbf{x}(\lambda))) \geq P(\lambda\mathcal{H}(\mathbf{x}^1) + (1-\lambda)\mathcal{H}(\mathbf{x}^2)) \geq \min\{P(\mathcal{H}(\mathbf{x}^1)), P(\mathcal{H}(\mathbf{x}^2))\} = \alpha$. Proto je $K_1(\alpha)$ konvexní.

Pro přiblížení, předpokládejme $\mathbf{x}^\nu \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$, kde $\mathbf{x}^\nu \in K_1(\alpha)$. Uvažujme $\mathcal{H}(\mathbf{x}^\nu)$. Když $h \leq A\mathbf{x}^{\nu_i}$ pro některou podposloupnost $\{\nu_i\}$ posloupnosti $\{\nu\}$, pak $h \leq A\bar{\mathbf{x}}$. Proto $\limsup_\nu \mathcal{H}(\mathbf{x}^\nu) \subset \mathcal{H}(\bar{\mathbf{x}})$, tak $P(\mathcal{H}(\bar{\mathbf{x}})) \geq P(\limsup_\nu \mathcal{H}(\mathbf{x}^\nu)) \geq \limsup_\nu P(\mathcal{H}(\mathbf{x}^\nu)) \geq \alpha$. \square

Významnost vět 4.9 a 4.10 tkví ve velikosti třídy pravděpodobnostních měr, které splňují tyto podmínky. Konkrétně věta 4.9 říká, že každá hustota pravděpodobnosti ve tvaru $f(x) = e^{-l(x)}$, kde l je konvexní funkce, dává kvazikonkávní pravděpodobnostní míru, viz [2]. Tyto míry zahrnují vícerozměrné normální, beta a Dirichletovo rozdělení a jsou logaritmicko-konkávní. Tyto distribuční funkce vedou na efektivně řešitelný deterministický ekvivalent jako v následující větě.

Definice 4.2. *Řekneme, že funkce $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je logaritmicko-konkávní, pokud pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ a $0 < \lambda < 1$ platí nerovnost*

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \geq (f(\mathbf{x}))^\lambda (f(\mathbf{y}))^{1-\lambda}.$$

Věta 4.11. *Předpokládejme konstantní A a složky h_i , $i = 1, \dots, m$ vektoru \mathbf{h} jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s logaritmicko-konkávní pravděpodobnostní mírou, P_i , a distribuční funkcí F_i , pak $K_1(\alpha) = \{\mathbf{x} | \sum_{i=1}^m \ln(F_i(A_i\mathbf{x})) \geq \ln\alpha = \ln(\prod_{i=1}^m \alpha_i)\}$, je konvexní.*

Důkaz. Z předpokladu nezávislosti, $P(A\mathbf{x} \geq \mathbf{h}) = \prod_{i=1}^m P_i[A_i\mathbf{x} \geq h_i] = \prod_{i=1}^m F_i(A_i\mathbf{x})$. Tak, $K_1(\alpha) = \{\mathbf{x} | \prod_{i=1}^m F_i(A_i\mathbf{x}) \geq \alpha\}$. Užitím logaritmu, obdržíme

$$K_1(\alpha) = \{\mathbf{x} | \sum_{i=1}^m \ln(F_i(A_i\mathbf{x})) \geq \ln\alpha\}.$$

Protože

$$\begin{aligned} F_i(A_i(\lambda\mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2)) &= P_i(h_i \leq A_i(\lambda\mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2)) \\ &\geq P_i(\lambda\{h_i \leq A_i\mathbf{x}^1\} + (1-\lambda)\{h_i \leq A_i\mathbf{x}^2\}) \\ &\geq (P_i(\{h_i \leq A_i\mathbf{x}^1\}))^\lambda (P_i(\{h_i \leq A_i\mathbf{x}^2\}))^{1-\lambda} \\ &= (F_i(A_i\mathbf{x}^1))^\lambda (F_i(A_i\mathbf{x}^2))^{1-\lambda}, \end{aligned}$$

logaritmus $F_i(A_i\mathbf{x})$ je konkávní funkce a $K_1(\alpha)$ je konvexní. \square

Logaritmicko-konkávní distribuční funkce zahrnují funkci rostoucí chyby, které jsou běžné ve spolehlivosti. Jiné typy kvazikonkávních měr zahrnují vícerozměrné t a F rozdělení pravděpodobnosti, viz [2]. Protože tato rozdělení pravděpodobností jsou nejužívanější ve vícerozměrné analýze, lze zřejmě předpokládat, že pro tato spojitá rozdělení pravděpodobnosti a pevně zvolené A , je konvexnost množiny řešení obecně zaručena.

Když A je také náhodná, pak konvexnost množiny řešení není zaručena. Následující věta udává výsledek pro normální rozdělení pravděpodobnosti s pevnou kovarianční strukturou přes sloupce matice A a \mathbf{h} .

4.4. ÚLOHY S PRAVDĚPODOBNOSTNÍM OMEZENÍM

Věta 4.12. Jestliže $A_1, \dots, A_{n_1}, \mathbf{h}$ mají spojitě normální rozdělení se společnou kovarianční maticí $\mathbb{E}[(A_i - \mathbb{E}(A_i))(A_j - \mathbb{E}(A_j))^T] = r_{ij}C$, pro $i, j = 1, \dots, n_1$ a

$$\mathbb{E}[(A_i - \mathbb{E}(A_i))(\mathbf{h} - \mathbb{E}(\mathbf{h}))] = s_i C$$

pro $i = 1, \dots, n_1$, kde r_{ij} a s_i jsou konstanty pro všechny i a j , pak $K_1(\alpha)$ je konverzní pro $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Nějaké další specifické příklady, kde matice $A = A_1$ může být náhodná. V případě, že $\mathbf{h} \equiv 0$ a A má normální rozdělení, pak je deterministický ekvivalent snadno dosažitelný.

Věta 4.13. Předpokládejme, že $n_1 = 1$, $h_1 = 0$, a A_1 má průměr \bar{A}_1 a kovarianční matici C_1 , pak $K_1(\alpha) = \{x | \bar{A}_1 x - \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{x}^T C_1 \mathbf{x}} \geq 0\}$, kde Φ je standardní distribuční funkce normálního rozdělení.

Důkaz. Všimněme si, že $A_1 \mathbf{x}$ má normální rozdělení s průměrem $\bar{A}_1 \mathbf{x}$ a rozptylem $\mathbf{x}^T C_1 \mathbf{x}$. Pokud $\mathbf{x}^T C_1 \mathbf{x} = 0$ pak je výsledek okamžitý. Pokud ne pak $\frac{A_1 \mathbf{x} - \bar{A}_1 \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^T C_1 \mathbf{x}}}$ je náhodná veličina se standardizovaným normálním rozdělením a distribuční funkcí Φ a platí

$$\begin{aligned} P(A_1 \mathbf{x} \geq 0) &= P\left(\frac{A_1 \mathbf{x} - \bar{A}_1 \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^T C_1 \mathbf{x}}} \geq \frac{-\bar{A}_1 \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^T C_1 \mathbf{x}}}\right) \\ &= P\left(\frac{A_1 \mathbf{x} - \bar{A}_1 \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^T C_1 \mathbf{x}}} \leq \frac{\bar{A}_1 \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^T C_1 \mathbf{x}}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\bar{A}_1 \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^T C_1 \mathbf{x}}}\right) \end{aligned}$$

Dosazením do definice $K_1(\alpha)$ obdržíme závěr. □

Nyní ukážeme některé podobnosti mezi modely s pravděpodobnostními omezeními a modely s postihem. Modely s pravděpodobnostními omezeními a modely s postihem mohou často vést ke stejným optimálním řešením. Některé aspekty modelovacího procesu mohou upřednostňovat jedno nad druhým, ale tyto rozdíly obecně představují různý postoj rozhodovatele k riziku.

K uvedení do souvislostí mezi úlohou s postihem a úlohou s pravděpodobnostními omezeními využijeme jednoduchý příklad. Uvažujme následující úlohu P s pravděpodobnostními omezeními:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ P_i[T_i \mathbf{x} \geq h_i] \geq \alpha_i, i = 1, \dots, m_2, \\ \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

kde P_i je pravděpodobnostní míra vektoru h_i a F_i je jeho distribuční funkce. Pro deterministický ekvivalent (4.4.2), položme $F_i(h_i^*) = \alpha_i$ a obdržíme:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ T_i \mathbf{x} \geq h_i^*, i = 1, \dots, m_2, \\ \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Předpokládejme, že vyřešíme úlohu (4.4.3) a získáme optimální \mathbf{x}^* a optimální duální řešení $\{\lambda^*, \pi^*\}$, kde $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \lambda^* + \mathbf{h}^{*T} \pi^*$. Pokud $\pi_i^* = 0$, mějme $q_i^+ = 0$ a pokud $\pi_i^* > 0$, pak $q_i^+ = \frac{\pi_i^*}{1 - \alpha_i}$. Potom ekvivalentní duální stochastická úloha D s jednoduchým postihem k primární úloze P (4.4.2) je:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbb{E}_h[\mathbf{q}^{+T} \mathbf{y}^+] \\ \text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & T_i \cdot \mathbf{x} + y_i^+ - y_i^- = h_i, \quad i = 1, \dots, m_2, \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y}^+, \mathbf{y}^- \geq 0. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Ekvivalencí úloh (4.4.2) a (4.4.4) rozumíme, že každé optimální řešení \mathbf{x}^* primární úlohy P (4.4.2) odpovídá nějakému řešení $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^{*+})$, které je optimální v duální úloze D (4.4.4) pro vhodně definované \mathbf{q}^+ , takové, že každé $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^{*+})$ optimální v (4.4.4) odpovídá \mathbf{x}^* optimálnímu v (4.4.2) pro vhodně zvolené α_i . První část ekvivalence ukážeme v následujícím teorému.

Věta 4.14. *Pro q_i^+ definované jako funkce optimálního π^* duální úlohy D k primární úloze P (4.4.2), pokud je \mathbf{x}^* optimem v (4.4.2), pak existuje $\mathbf{y}^{*+} \geq 0$ takové, že $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^{*+})$ je optimem primární úlohy P (4.4.4), viz [2].*

Důkaz. Prvně mějme \mathbf{x}^* , optimální řešení úlohy primární úlohy P (4.4.2), které také musí být optimem v úloze (4.4.3) s duálními proměnnými $\{\lambda^*, \pi^*\}$, $\pi^* \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T - \lambda^{*T} A - \pi^{*T} T &\geq 0, \\ T\mathbf{x}^* - \mathbf{h}^* &\geq 0, \\ (\mathbf{c}^T - \lambda^{*T} A - \pi^{*T} T)\mathbf{x}^* &= 0, \\ \pi^{*T}(T\mathbf{x}^* - \mathbf{h}^*) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Nyní, pro optimum \mathbf{x}^* duální úlohy D (4.4.4), uvažujme podmínky optimality z důsledku 4.7.1. Tyto podmínky říkají, že pokud existuje λ^* takové, že

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T - \lambda^{*T} A - \sum_{i=1}^{m_2} T_i (q_i^+ - q_i F_i(T_i \cdot \mathbf{x}^*)) &\geq 0, \\ (\mathbf{c}^T - \lambda^{*T} A - \sum_{i=1}^{m_2} T_i (q_i^+ - q_i F_i(T_i \cdot \mathbf{x}^*))\mathbf{x}^* &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Dosazením za $\pi_i^* = q_i^+(1 - \alpha_i)$ v (4.4.5) a z komplementarity podmínek $\alpha_i = F_i(h_i^*) = F_i(T_i \cdot \mathbf{x}^*)$, když $\pi_i^* > 0$ obdržíme

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T - \lambda^{*T} A - \pi^{*T} T &= \mathbf{c}^T - \lambda^{*T} A - \sum_{i=1}^{m_2} T_i (q_i^+ (1 - F_i(T_i \cdot \mathbf{x}^*))) \\ &= \mathbf{c}^T - \lambda^{*T} A - \sum_{i=1}^{m_2} T_i (q_i^+ - q_i F_i(T_i \cdot \mathbf{x}^*)) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

z definice víme, že $\pi_i^* > 0$ tehdy a jen tehdy když $q_i^+ > 0$. Z (4.4.7) můžeme potvrdit podmínky v (4.4.6) a určit optimalitu \mathbf{x}^* z (4.4.4). \square

Pokud předpokládáme optimalitu \mathbf{x}^* v (4.4.4), pak můžeme obrátit tvrzení a ukázat, že \mathbf{x}^* je také optimem v (4.4.2) pro některou hodnotu α_i . Tyto ekvivalence jsou ale slabé, protože požadují prvotní znalost optimálního řešení jedné z úloh.

4.4. ÚLOHY S PRAVDĚPODOBNOSTNÍM OMEZENÍM

4.4.1. Penalizační přístup k řešení úloh s pravděpodobnostními omezeními

Uvažujme následující úlohu s pravděpodobnostním omezením

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon &= \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ P(g_1(\mathbf{x}, \xi) \leq 0, \dots, g_m(\mathbf{x}, \xi) \leq 0) &\geq 1 - \varepsilon, \\ \mathbf{x} \in X, \xi &\in \mathbb{R}^{n'}, \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

s optimálním řešením \mathbf{x}_ε a danou úrovní $\varepsilon \in (0, 1)$.

Dále uvažujme funkci $\vartheta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, určující hodnotu penalizačního členu, která je spojitá, neklesající v jednotlivých složkách, rovna 0 na \mathbb{R}_-^m a kladná jinde. Penalizovaná omezení označíme

$$\Phi(\mathbf{x}, \xi) = \vartheta((g_1(\mathbf{x}, \xi), \dots, (g_m(\mathbf{x}, \xi))) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n'} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (4.4.9)$$

Pak platí

$$\begin{aligned} P(g_1(\mathbf{x}, \xi) \leq 0, \dots, g_m(\mathbf{x}, \xi) \leq 0) &\geq 1 - \varepsilon \\ \iff \\ P(\Phi(\mathbf{x}, \xi) = 0) &\geq 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Pak existují dva možné přístupy k formulování úlohy stochastické optimalizace s pravděpodobnostním omezením, užívající penalizační funkci. Střední hodnota penalizovaných omezení může být zahrnuta do účelové funkce jako penalizační člen, nebo může být ve formě omezení $\mathbb{E}(\Phi(\mathbf{x}, \xi)) \leq L$, $L \geq 0$. Dále se budeme zabývat pouze prvním případem, což vede na úlohu, viz [3]:

$$\phi_r = \min_{\mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + r\mathbb{E}(\Phi(\mathbf{x}, \xi))], \quad (4.4.10)$$

kde r je kladný parametr, viz část 3.4 věnovaná penalizačním funkcím. Označme \mathbf{x}_r optimální řešení (4.4.10).

Nyní popišme rozdělení náhodného vektoru ξ pomocí konečného počtu realizací ξ^s , $s = 1, \dots, S$ se známými pravděpodobnostmi $0 < p_s \leq 1$, $\sum_{s=1}^S p_s = 1$, takzvanými scénáři. Pak úlohu s pravděpodobnostním omezením (4.4.8) můžeme zapsat v následujícím tvaru

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon &= \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ \sum_{s=1}^S p_s I(g_1(\mathbf{x}, \xi^s) \leq 0, \dots, g_m(\mathbf{x}, \xi^s) \leq 0) &\geq 1 - \varepsilon, \\ \mathbf{x} \in X, \xi &\in \mathbb{R}^{n'}, \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

kde I označuje indikátorovou funkci, která je rovna jedné, pokud jsou podmínky splněny a nule jinak. Nechť množina X je kompaktní a $g_i(\cdot, \xi^s)$ jsou spojitě pro všechny kombinace dvojic (i, s) .

Optimální přípustné řešení pro všechny scénáře definujeme jako řešení následující úlohy

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}, \xi^s) &\leq 0, \dots, g_m(\mathbf{x}, \xi^s) \leq 0, \quad s = 1, \dots, S \\ \mathbf{x} &\in X. \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Existence tohoto řešení bude rozhodující v důkazu limitní ekvivalence úloh (4.4.8) a (4.4.10).

Věta 4.15. *Uvažujme úlohy (4.4.8) a (4.4.10) a předpokládejme: X je neprázdná kompaktní množina, f spojitá funkce,*

(i) $g_i(\cdot, \xi^s)$, $i = 1, \dots, m$ jsou spojité pro všechna $s = 1, \dots, S$;

(ii) *existuje alespoň jedno $\mathbf{x}' \in X$ splňující $g_i(\mathbf{x}', \xi^s) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$ pro všechna $s = 1, \dots, S$.*

Pro libovolná $\gamma \in (0, 1)$, $r > 0$ a $\varepsilon \in (0, 1)$ položme

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{x}) &= \sum_{s=1}^S p_s I(\Phi(\mathbf{x}, \xi^s) > 0), \\ \alpha_r(\mathbf{x}) &= r \sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}, \xi^s), \\ \beta_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}, \xi^s).\end{aligned}$$

Pak pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$ existuje dostatečně velké r takové, že minimalizace (4.4.10) generuje optimální řešení \mathbf{x}_r , které splňuje pravděpodobnostní omezení s daným ε . Každá konvergentní podposloupnost řešení \mathbf{x}_r konverguje ke stále přípustnému řešení, které je optimálním řešením úlohy (4.4.12).

Navíc můžeme sestavit hranice optimální hodnoty řešení φ_ε úlohy (4.4.8) založených na optimální hodnotě ϕ_r úlohy (4.4.10) a naopak:

$$\begin{aligned}\phi_{1/\varepsilon^\gamma(\mathbf{x}_r)} - \beta_\varepsilon(\mathbf{x}) (\mathbf{x}_{\varepsilon(\mathbf{x}_r)}) &\leq \varphi_{\varepsilon(r)} \leq \phi_r - \alpha_r(\mathbf{x}_r), \\ \varphi_{\varepsilon(\mathbf{x}_r)} + \alpha_r(\mathbf{x}_r) &\leq \phi_r \leq \varphi_{r^{-1/\gamma}} + \beta_{r^{-1/\gamma}}(\mathbf{x}_{r^{-1/\gamma}}),\end{aligned}\tag{4.4.13}$$

s vlastností

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha_r(\mathbf{x}_r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \varepsilon(\mathbf{x}_r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \beta_\varepsilon(\mathbf{x}_\varepsilon) = 0,$$

pro každou posloupnost optimálních řešení \mathbf{x}_r a \mathbf{x}_ε .

Důkaz. Z předpokladu (ii) vyplývá, že existuje $\mathbf{x}' \in X$ pro které platí $\Phi(\mathbf{x}', \xi^s) = 0$ pro všechna s . Pak víme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nějaké $\mathbf{x}_\varepsilon \in X$ splňující

$$\sum_{s=1}^S p_s I(g_1(\mathbf{x}, \xi^s) \leq 0, \dots, g_m(\mathbf{x}, \xi^s) \leq 0) \geq 1 - \varepsilon.$$

Označme

$$C = \max_{s=1, \dots, S} \max_{\mathbf{x} \in X} \Phi(\mathbf{x}, \xi^s),$$

které je konečné díky našim předpokladům. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí následující vztahy

$$\sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}_\varepsilon, \xi^s) \leq C \sum_{s=1}^S p_s I(\Phi(\mathbf{x}_\varepsilon, \xi^s) > 0) \leq C\varepsilon.$$

Proto pro $\varepsilon \rightarrow 0_+$

$$\beta_\varepsilon(\mathbf{x}_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}_\varepsilon, \xi^s) \rightarrow 0,\tag{4.4.14}$$

4.4. ÚLOHY S PRAVDĚPODOBNOSTNÍM OMEZENÍM

pro libovolné $\gamma \in (0, 1)$.

Označme

$$\delta_r = \sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}_r, \xi^s)$$

pro libovolnou posloupnost optimálních řešení \mathbf{x}_r úlohy (4.4.10). Pak naše předpoklady a obecné vlastnosti penalizačních funkcí nám zaručí $\delta_r \rightarrow 0_+$ a navíc

$$\alpha_r(\mathbf{x}_r) = r\delta_r \rightarrow 0 \text{ pro } r \rightarrow \infty. \quad (4.4.15)$$

Označme $G(\mathbf{x}, \cdot)$ empirickou distribuční funkci $\Phi(\mathbf{x}, \xi)$ pro pevné \mathbf{x} , definovanou

$$G(\mathbf{x}, y) = \sum_{s=1}^S p_s I(\Phi(\mathbf{x}, \xi^s) \leq y).$$

Pak můžeme odvodit

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{x}_r) &= \sum_{s=1}^S p_s I(\Phi(\mathbf{x}_r, \xi^s) > 0) \\ &= \sum_{s=1}^S p_s I(0 < \Phi(\mathbf{x}_r, \xi^s) \leq \sqrt{\delta_r}) + \sum_{s=1}^S p_s I(\Phi(\mathbf{x}_r, \xi^s) > \sqrt{\delta_r}) \\ &\leq G(\mathbf{x}_r, \sqrt{\delta_r}) - G(\mathbf{x}_r, 0) + \frac{1}{\sqrt{\delta_r}} \sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}_r, \xi^s) \\ &\leq G(\mathbf{x}_r, \sqrt{\delta_r}) - G(\mathbf{x}_r, 0) + \sqrt{\delta_r} \rightarrow 0 \text{ jak } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

kde empirickou distribuční funkci jsme použili k přepsání první sumy a Čebyševovu nerovnost jsme použili k odhadnutí meze druhé sumy. Výsledek pak vyplývá z pravé spojitosti empirické distribuční funkce a předchozích vztahů. Vidíme, že pro dostatečně velké r můžeme vygenerovat přípustné řešení úlohy s pravděpodobnostním omezením pro libovolně malé ε .

Optimální řešení \mathbf{x}_r penalizační úlohy s parametrem r je zřejmě přípustným řešením pravděpodobnostní úlohy s $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}_r)$ to jest

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_r) &\geq \min_{\mathbf{x} \in X} \left\{ f(\mathbf{x}), \sum_{s=1}^S p_s I(g_1(\mathbf{x}, \xi^s) \leq 0, \dots, g_m(\mathbf{x}, \xi^s) \leq 0) \geq 1 - \varepsilon(\mathbf{x}_r) \right\} \\ &= f(\mathbf{x}_{\varepsilon(\mathbf{x}_r)}) = \varphi_{\varepsilon(\mathbf{x}_r)}. \end{aligned}$$

Proto získáme spodní mez optimálního řešení úlohy s penalizační účelovou funkcí

$$\begin{aligned} \phi_r &= f(\mathbf{x}_r) + r \sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}_r, \xi^s) \\ &\geq f(\mathbf{x}_{\varepsilon(r)}) + r \sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}_r, \xi^s) \\ &= \varphi_{\varepsilon(r)} + \alpha_r(\mathbf{x}_r). \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Což jsou přímo meze v (4.4.13).

Protože pro optimální řešení $\mathbf{x}_\varepsilon \in X$ pravděpodobnostní úlohy platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_\varepsilon) + \varepsilon^{-\gamma} \sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}_\varepsilon, \xi^s) &\geq \min_{\mathbf{x} \in X} \left[f(\mathbf{x}) + \varepsilon^{-\gamma} \sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}, \xi^s) \right] \\ &= f(\mathbf{x}_{\varepsilon^{-\gamma}}) + \varepsilon^{-\gamma} \sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}_{\varepsilon^{-\gamma}}, \xi^s) = \phi_{\varepsilon^{-\gamma}}, \end{aligned}$$

obdržíme spodní mez optimální hodnoty úlohy s pravděpodobnostním omezením

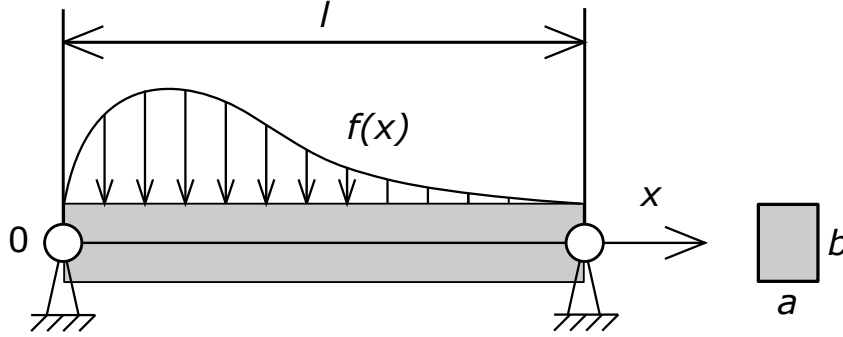
$$\begin{aligned}
\varphi_\varepsilon &= \left(\varphi_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma} \sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}_\varepsilon, \xi^s) \right) - \varepsilon^{-\gamma} \sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}_\varepsilon, \xi^s) \\
&\geq \phi_{\varepsilon^{-\gamma}} - \varepsilon^{-\gamma} \sum_{s=1}^S p_s \Phi(\mathbf{x}_\varepsilon, \xi^s) \\
&= \phi_{\varepsilon^{-\gamma}} - \beta_\varepsilon(\mathbf{x}_\varepsilon).
\end{aligned} \tag{4.4.18}$$

Tato mez je pak užita v (4.4.13) položením $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}_r)$ a $\varepsilon = r^{-1/\gamma}$. Tím je důkaz hotov. \square

Tím jsme rozšířili teorii penalizačních funkcí na stochastické úlohy s nerovnostními omezeními závisujícími na náhodném vektoru se známým rozdělením pravděpodobnosti. Ukázali jsme, že asymptotická ekvivalence je zachována a meze optimálních hodnot zůstávají v platnosti pro konečné diskrétní rozdělení pravděpodobnosti se známou pravděpodobností, viz [3].

5. Řešený příklad

5.1. Základní formulace



Obrázek 5.1: Znázornění modelové úlohy.

Nyní formulujeme konstrukční úlohu návrhu optimálních rozměrů nosníku s konstantním obdélníkovým průřezem na obou koncích zajištěným rotační vazbou, zobrazeného na obrázku 5.1. Požadujeme minimální obsah průřezu nosníku za podmínky, že pravděpodobnost, že tahové ani tlakové napětí nosníku nepřesáhne předepsané meze $\sigma_{\max \text{ TAH}}$ a $\sigma_{\max \text{ TLAK}}$, bude větší než $1 - \varepsilon$.

$$\min ab \quad (5.1.1a)$$

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x, \xi) = f(x, \xi) + \frac{\varrho}{l} ab \quad (5.1.1b)$$

$$\begin{aligned} v(0, \xi) &= 0, & v(l, \xi) &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, \xi) &= 0, & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(l, \xi) &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.1c)$$

$$P\left(\begin{aligned} \sigma(x, \xi)_{\text{TAH}} &\leq \sigma_{\max \text{ TAH}}; \\ \sigma(x, \xi)_{\text{TLAK}} &\geq -\sigma_{\max \text{ TLAK}} \end{aligned} \right) \geq 1 - \varepsilon, \quad (5.1.1d)$$

$$\begin{aligned} \sigma(x, \xi)_{\text{TAH}} &= \frac{b}{2} E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \xi), \\ \sigma(x, \xi)_{\text{TLAK}} &= -\frac{b}{2} E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \xi), \end{aligned} \quad (5.1.1e)$$

$$\begin{aligned} a_{\min} &\leq a \leq a_{\max}, \\ b_{\min} &\leq b \leq b_{\max}, \end{aligned} \quad (5.1.1f)$$

$$x \in \langle 0, l \rangle \quad (5.1.1g)$$

kde ϱ je hustota materiálu, $I_z = \frac{ab^3}{12}$ je kvadratický moment průřezu, l je délka nosníku a E je Youngův modul pružnosti.

Všimněme si že hodnoty tahového a tlakového napětí určeného vztahy (5.1.1e) se liší pouze znaménkem a přesto jsme pravděpodobnostní podmínku (5.1.1d) nezapsali ve tvaru, viz [7]

$$P(|\sigma(x, \xi)| \leq \sigma_{\max}) \geq 1 - \varepsilon$$

5. ŘEŠENÝ PŘÍKLAD

a to kvůli tomu, že řada materiálů má různé meze napětí v tlaku a tahu. Přesto využijeme této skutečnosti a faktu, že stačí podmínku (5.1.1d) testovat na maximální hodnotu napětí v prutu a zapíšeme ji ve tvaru

$$P(\max_x \sigma(x, \xi) \leq \sigma_{\max \text{TAH}}; -\max_x \sigma(x, \xi) \geq -\sigma_{\max \text{TLAK}}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Nyní sestavíme matici tuhosti diferenciální rovnice (5.1.1b) s okrajovými podmínkami (5.1.1c) pro metodu konečných prvků. Nyní uvažujeme dělení nosníku délky na n elementů délky L_e , $\sum_{e=1}^n L_e = l$, kde l je délka nosníku. Uzlové body těchto elementů označíme x_1, \dots, x_{n+1} , pro jejich souřadnice platí $x_1 = 0$, $x_{n+1} = l$ a $x_{i+1} = x_i + L_e$, $i = 1, \dots, n$. Ze druhé kapitoly víme, že matice tuhosti nosníkového elementu e je

$$[k^e] = \frac{EI_z}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix},$$

viz (2.3.19). Nyní sestavme globální matici tuhosti K složenou z n elementů

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & \dots & \vdots & \vdots \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 + k_{11}^2 & k_{34}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & \dots & \dots \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 + k_{21}^2 & k_{44}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 + k_{11}^3 & k_{34}^2 + k_{12}^3 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 + k_{21}^3 & k_{44}^2 + k_{22}^3 & \dots & \dots \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & \dots & k_{33}^n & k_{34}^n \\ 0 & \dots & & & & & \dots & k_{43}^n & k_{44}^n \end{bmatrix}.$$

V našem případě uvažujeme prvky jednotné délky, pak je globální matice tuhosti následující

$$\frac{EI_z}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & \dots & \vdots & \vdots \\ -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & 6L_e & \dots & \dots \\ 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -12 & -6L_e & 24 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & \dots & \dots \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & \dots & 12 & -6L_e \\ 0 & \dots & & & & & \dots & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}. \quad (5.1.2)$$

5.1. ZÁKLADNÍ FORMULACE

Vektor pravých stran jednotlivých elementů je roven

$$\mathbf{F}_e(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{q_e L_e}{2} + V_1 \\ \frac{q_e L_e^2}{12} + M_1 \\ \frac{q_e L_e}{2} + V_2 \\ -\frac{q_e L_e^2}{12} + M_2 \end{pmatrix},$$

kde $q_e = q_e(\xi)$ je liniové zatížení působící na elementu e , V_1 a V_2 jsou síly působící v uzlech elementu, M_1 a M_2 jsou momenty působící v uzlech elementu. Pak globální vektor pravých stran je

$$\mathbf{F}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{q_1 L_e}{2} + V_1 \\ \frac{q_1 L_e^2}{12} + M_1 \\ \frac{q_1 L_e}{2} + \frac{q_2 L_e}{2} + V_2 \\ -\frac{q_1 L_e^2}{12} + \frac{q_2 L_e^2}{12} + M_2 \\ \frac{q_2 L_e}{2} + \frac{q_3 L_e}{2} + V_3 \\ -\frac{q_2 L_e^2}{12} + \frac{q_3 L_e^2}{12} + M_3 \\ \vdots \\ \frac{q_{n-1} L_e}{2} + \frac{q_n L_e}{2} + V_n \\ -\frac{q_{n-1} L_e^2}{12} + \frac{q_n L_e^2}{12} + M_n \\ \frac{q_n L_e}{2} + V_{n+1} \\ -\frac{q_n L_e^2}{12} + M_{n+1} \end{pmatrix},$$

viz (2.3.21).

Diferenciální rovnici pak zapíšeme

$$\frac{EI_z}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & \cdots & 0 \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & \cdots & \vdots \\ -12 & -6L_e & 12 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 12 & -6L_e \\ & & & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ v_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1 L_e}{2} + V_1 \\ \frac{q_1 L_e^2}{12} + M_1 \\ \frac{q_1 L_e}{2} + \frac{q_2 L_e}{2} + V_2 \\ -\frac{q_1 L_e^2}{12} + \frac{q_2 L_e^2}{12} + M_2 \\ \vdots \\ \frac{q_n L_e}{2} + V_{n+1} \\ -\frac{q_n L_e^2}{12} + M_{n+1} \end{pmatrix},$$

kde v_1, \dots, v_{n+1} jsou posuny odpovídajících uzlů ve směru osy y a $\theta_1, \dots, \theta_{n+1}$ jsou natočení.

Jak bylo řečeno v části 2.2.2, matice (5.1.2) je singulární. To vyřešíme aplikací okrajových podmínek (5.1.1c). Jelikož námi uvažované podmínky jsou homogenní, tak podmínky $v(0, \xi) = v(l, \xi) = 0$ předepisují nulové posunutí a v matici K je zohledníme „vypuštěním“ odpovídajících řádků a sloupců z matice K .

5. ŘEŠENÝ PŘÍKLAD

Podmínky $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, \xi) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(l, \xi) = 0$ specifikují typ upevnění v koncových bodech, tyto konkrétně předepisují, $M_1 = M_{n+1} = 0$. Pak soustavu zapíšeme

$$\frac{EI_z}{L_e^3} \begin{bmatrix} 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -6L_e & 24 & 0 & -12 & 6L_e & \dots & \vdots \\ 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 & \dots & \\ 0 & -12 & -6L_e & 24 & 0 & \dots & \\ \vdots & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & \dots & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 8L_e^2 & 2L_e^2 \\ 0 & \dots & & & \dots & 2L_e^2 & 4L_e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ v_n \\ \theta_n \\ \theta_{n+1} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{q_1 L_e^2}{12} \\ \frac{q_1 L_e}{2} + \frac{q_2 L_e}{2} + V_2 \\ -\frac{q_1 L_e^2}{12} + \frac{q_2 L_e^2}{2} + M_2 \\ \frac{q_2 L_e}{2} + \frac{q_3 L_e}{2} + V_3 \\ -\frac{q_2 L_e^2}{12} + \frac{q_3 L_e^2}{12} + M_3 \\ \vdots \\ \frac{q_{n-1} L_e}{2} + \frac{q_n L_e}{2} + V_n \\ -\frac{q_{n-1} L_e^2}{12} + \frac{q_n L_e^2}{12} + M_n \\ -\frac{q_n L_e^2}{12} \end{Bmatrix},$$

tuto rovnici budeme dále značit

$$K\mathbf{D} = \mathbf{F}(\xi).$$

Podle vztahu (2.3.25) je napětí $\sigma(x, \xi)$ v elementu lineární kombinací napětí v jeho uzlech. Proto stačí napětí vyčíslit pouze v uzlových bodech podle vzorců (2.3.26). Pak je podmínka (5.1.1e) splněna pokud je splněna s předepsanou pravděpodobností pro největší hodnotu napětí ze všech uzlů.

Naši úlohu nyní můžeme zapsat v následujícím tvaru

$$\begin{aligned} & \min_{ab} \\ & K\mathbf{D} = \mathbf{F}(\xi), \\ & P\left(\begin{array}{l} \max_i \sigma(x_i, \xi) \leq \sigma_{\max \text{ TAH}}; \\ - \max_i \sigma(x_i, \xi) \geq - \sigma_{\max \text{ TLAK}} \end{array} \right) \geq 1 - \varepsilon. \\ & a_{\min} \leq a \leq a_{\max}, \\ & b_{\min} \leq b \leq b_{\max}, \\ & x_i, i = 1, \dots, n+1. \end{aligned}$$

5.2. FORMULACE ÚLOHY

Nyní využijeme poznatků z věty 4.15 a úlohu s pravděpodobnostním omezením přeformulujeme na limitně ekvivalentní úlohu využitím penalizačních funkcí z části 3.4. Tuto limitně ekvivalentní úlohu zapíšeme v tomto tvaru

$$\begin{aligned} \min ab + r\mathbb{E}_\xi \Phi(a, b, \xi) \\ K\mathbf{D} = \mathbf{F}(\xi), \\ a_{\min} \leq a \leq a_{\max}, \\ b_{\min} \leq b \leq b_{\max}, \\ x_i, i = 1, \dots, n+1 \\ r \geq 0, \end{aligned}$$

kde $\Phi(a, b, \xi)$ jsou penalizovaná pravděpodobnostní omezení, které jsou funkcemi a , b a náhodné veličiny ξ .

Nyní, když popíšeme náhodnou veličinu ξ pomocí konečného počtu realizací ξ^s , $s = 1, \dots, S$ se známými pravděpodobnostmi $0 < p_s < 1$, $\sum_{s=1}^S p_s = 1$. V případě, že $S = 1$ a $p_s = 1$ konvexnost přípustné množiny podle věty 4.10, zaručíme normálním rozdělením pravděpodobnosti jednotlivých složek náhodné veličiny ξ a jejich nezávislostí. Pak zapíšeme úlohu ve finálním tvaru

$$\begin{aligned} \min ab + r \sum_{s=1}^S p_s \Phi(a, b, \xi^s) \\ K\mathbf{D} = \mathbf{F}_s, \\ a_{\min} \leq a \leq a_{\max}, \\ b_{\min} \leq b \leq b_{\max}, \\ x_i, i = 1, \dots, n+1, \\ r \geq 0. \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

5.2. Formulace úlohy

Nyní budeme postupně řešit úlohu (5.1.3) o těchto parametrech: $l = 10[m]$, $a \in \langle 0, 1; 1 \rangle[m]$, $b \in \langle 0, 1; 1 \rangle[m]$, $E = 210 \cdot 10^9[Pa]$, $\sigma_{\max \text{TAH}} = 250 \cdot 10^6[Pa]$, $\sigma_{\max \text{TLAK}} = 300 \cdot 10^6[Pa]$, $\varrho = 7800[\frac{kg}{m^3}]$ s 1001 scénáři, které určují rozložení působících na nosník o celkovém součtu $40000N$.

5.2.1. Řešení pomocí vnější penalizační funkce

Nyní konkretizujeme účelovou funkci úlohy (5.1.3). K vyčíslení penalizačního členu $\Phi(a, b, \xi^s)$ využijeme vnější penalizační funkci (3.4.1). Pak účelová funkce úlohy (5.1.3) je

$$\begin{aligned} \min ab + r \sum_{s=1}^S p_s \langle \max_i \sigma(x_i, \xi^s) - \sigma_{\max \text{TAH}} \rangle^2 + \\ + r \sum_{s=1}^S p_s \langle \max_i \sigma(x_i, \xi^s) - \sigma_{\max \text{TLAK}} \rangle^2. \end{aligned}$$

Optimální hodnoty úlohy (5.1.3) s vnějším penalizačním členem pro parametr r jsou uvedeny v následující tabulce.

r	a	b	$1 - \varepsilon$
0.0016	0.10000	0.12340	0.26500
0.008	0.10000	0.12340	0.26500
0.04	0.10000	0.14407	0.82300
0.2	0.10000	0.15141	0.93925
1	0.10000	0.15341	0.96700
5	0.10011	0.15547	0.99100
25	0.10000	0.15592	0.99550
125	0.10000	0.15639	0.99775
625	0.10000	0.15669	0.99925

Z výsledků je patrné, že s rostoucím parametrem roste spolehlivost úlohy. Dále je vidět, že model poznal, že se má snažit maximalizovat kvadratický moment I_z nosníku při jeho minimálním obsahu průřezu, aniž by hodnota kvadratického momentu přímo figurovala v účelové funkci.

5.2.2. Řešení pomocí rozšířené Lagrangeovy penalizační funkce

Nyní konkretizujeme účelovou funkci úlohy (5.1.3). K vyčíslení penalizačního členu $\Phi(a, b, \xi^s)$ využijeme rozšířenou Lagrangeovu penalizační funkci (3.4.7). Pak účelová funkce úlohy (5.1.3) je

$$\begin{aligned} \min ab + r \sum_{s=1}^S p_s \langle \max_i \sigma(x_i, \xi^s) - \sigma_{\max \text{TAH}} + \frac{u_1}{2r} \rangle^2 - \frac{u_1^2}{4r} + \\ + r \sum_{s=1}^S p_s \langle \max_i \sigma(x_i, \xi^s) - \sigma_{\max \text{TLAK}} + \frac{u_2}{2r} \rangle^2 - \frac{u_2^2}{4r}. \end{aligned}$$

Optimální hodnoty úlohy (5.1.3) s rozšířeným Lagrangeovým penalizačním členem pro parametr r jsou uvedeny v následující tabulce.

r	a	b	u_1	u_2	$1 - \varepsilon$
0.0016	0.10000	0.12400	0.00000	0.00000	0.26500
0.008	0.10000	0.13519	0.00000	0.00000	0.40450
0.04	0.10000	0.14375	0.00000	0.00000	0.81400
0.2	0.10000	0.15000	0.00000	0.00000	0.91075
1	0.10000	0.15000	0.00000	0.00000	0.91075
5	0.10000	0.15000	0.00000	0.00000	0.91075
25	0.10000	0.15590	0.00000	0.00000	0.99550
125	0.10000	0.15642	0.00000	0.00000	0.99850
625	0.10000	0.15662	0.00000	0.00000	0.99925

Z tabulky je vidět, že výsledky jsou velmi podobné jako v případě užití vnějšího penalizačního členu. To není náhodou, všimněme si, že hodnoty u_1 a u_2 jsou rovny nule, pro tyto hodnoty přechází rozšířená Lagrangeova penalizační funkce ve vnější penalizační funkci. Z toho že $u_1 = u_2 = 0$ jde dále usuzovat, že pro toto konkrétní zadání nedochází k duality gap, viz [1].

5.2. FORMULACE ÚLOHY

5.2.3. Řešení pomocí rozšířené vnitřní penalizační funkce

Nyní konkretizujeme účelovou funkci úlohy (5.1.3). K vyčíslení penalizačního členu $\Phi(a, b, \xi^s)$ využijeme rozšířenou vnitřní penalizační funkci (3.4.9). Pak účelová funkce úlohy (5.1.3) je

$$\begin{aligned} \min ab + r \sum_{s=1}^S p_s q(\sigma_{\max \text{TAH}} - \max_i \sigma(x_i, \xi^s)) + \\ + r \sum_{s=1}^S p_s q(\sigma_{\max \text{TLAK}} - \max_i \sigma(x_i, \xi^s)), \end{aligned}$$

kde funkce q jsou definovány v (3.4.10) s hodnotou $k = 1$.

Optimální hodnoty úlohy (5.1.3) s rozšířeným vnitřním penalizačním členem pro parametr r jsou uvedeny v následující tabulce.

r	a	b	$1 - \varepsilon$
625	0.10000	0.15675	1.00000
125	0.10000	0.15675	1.00000
25	0.10000	0.15675	1.00000
5	0.10000	0.15675	1.00000
1	0.10000	0.15675	1.00000
0.2	0.10000	0.15675	1.00000
0.04	0.10000	0.15675	1.00000
0.008	0.10000	0.15675	1.00000
0.0016	0.10000	0.15675	1.00000

Z výsledků úlohy je vidět, že v tomto případě nedochází k postupnému nalézání spolehlivějších řešení, ale je ihned nalezeno řešení, které pravděpodobnostní podmínku splňuje pro všechny uvažované scénáře.

Tato penalizační funkce se od předchozích dvou liší tím, že neexistuje podmnožina jejího definičního oboru na kterém by nabývala nulových hodnot. Lze tedy usuzovat, že podmínka na nulovost funkce (4.4.9), viz [3], na \mathbb{R}_+^m je nutná, vzhledem k naší definici rozšířené penalizační se tato podmínka vztahuje na \mathbb{R}_+^m .

6. Závěr

V diplomové práci jsme řešili optimální volbu rozměrů obdélníkového průřezu nosníku s náhodným rozprostřením sil po jeho délce. Při formulaci úlohy jsme využili našich poznatků z oblasti stochastické optimalizace, penalizačních funkcí a aproximativních řešení okrajových úloh diferenciálních rovnic, konkrétně metody konečných prvků.

Pravděpodobnostní podmínku jsme rozdělili na dvě nejen kvůli různým materiálovým mezím napětí v tahu a tlaku, ale také proto, že v budoucnu by mohly být řešeny složitější stavební konstrukce, kde by se mohly objevit i síly působící v ose nosníku a tím by byl klasický přístup s absolutní hodnotou znemožněn.

Z výsledků modelového příkladu je patrné, že pro tuto úlohu jsou vnější a rozšířená Lagrangeova penalizační funkce ekvivalentní, protože hodnoty u_1 a u_2 jsou rovny nule a lze z toho usuzovat, že u této úlohy nedošlo k duality gap.

Z výsledků lze dále předpokládat, že rozšířená vnitřní penalizační funkce, není vhodná pro penalizační přístup řešení úloh s pravděpodobnostními omezeními, pokud je míra tolerance chyby ε větší než nula, protože ani toto slabé porušení nedovolí. To není žádoucí, protože v praxi tato řešení bývají příliš nákladná na realizaci.

Model by mohl být do budoucna rozšířen o zohlednění toho, že různé elementy konstrukčního prvku mají různou, náhodnou, kvalitu materiálu, která by se projevovала různými hodnotami Yangova modulu pružnosti, případně znáhodněnými povolenými mezemi napětí, nebo dokonce kombinací obojího.

Další možnou obměnou této úlohy by mohlo být to, že dosud jsme se zabývali optimálním návrhem, tedy konstrukčními specifikacemi, kterých v praxi nejsme schopni přesně dosáhnout a s těmito náhodnými odchylkami by se mohlo počítat již v samotném návrhu. Úloha byla řešena v programu MATLAB pomocí integrované funkce FMINCON využívající metodu SQP.

Literatura

- [1] BAZARAA, M. et al. *Nonlinear programming theory and algorithms*. New Jersey, John Wiley & Sons , 2006. ISBN 978-0-471-48600-8.
- [2] BIRGE, John R. a Francois LOUVEAUX. *Introduction to Stochastic Programming*. New York: Springer, 1997. ISBN 0-387-98217-5.
- [3] BRANDA, Martin. On relations between chance constrained and penalty function problems under discrete distributions. *Mathematical Methods of Operations Research*. 2013, **77**(2): 265-277. DOI: 10.1007/s00186-013-0428-7. ISSN 1432-2994. Dostupné také z: <http://link.springer.com/10.1007/s00186-013-0428-7>
- [4] HAFTKA, Raphael T. a Zafer GURDAL. *Elements of structural optimization*. 3rd rev. and expanded ed. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1992. ISBN 07-923-1504-9.
- [5] HUTTON, David V. *Fundamentals of finite element analysis*. International ed. Boston: McGraw-Hill, 2004. ISBN 00-711-2231-1.
- [6] KALL, Peter a Stein W WALLACE. *Stochastic programming*. New York: Wiley, 1994. ISBN 04-719-5158-7.
- [7] MRÁZKOVÁ, Eva. *Approximations in stochastic optimization and their applications*. [Disertační práce.] Brno: VUT, FSI, 2009. 95 s.
- [8] NEUBAUER, Jiří, Marek SEDLAČÍK a Oldřich KŘÍŽ. *Základy statistiky: aplikace v technických a ekonomických oborech*. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-4273-1.
- [9] RUSZCZYNSKI, Andrzej a Alexander SHAPIRO. *Stochastic programming*. 1st ed. Amsterdam: Elsevier, 2003, 688 s. ISBN 04-445-0854-6.
- [10] ZIENKIEWICZ, O. *The Finite Element Method: Volume 1: The Basic*. 4 ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 20002 ISBN 07-506-5049-4.

Seznam příloh

CD s matematickým modelem úlohy v programu MATLAB.

Zdrojový kód modelu

```
%% nacteni scenaru
load('Scenar1k25.mat','Scen','Pst');
%% vlastnosti prutu
m=length(Scen(:,1));
n=length(Scen(1,:));
L = 10; %m
Rozm = [100 200 0 0];%mm
E = 210*10^9;%Pa
MaxTah=250*10^6;%Pa
MaxTlak=300*10^6;%Pa
Ro=7800;
Zat=4000*Scen;
Iter=9;
r= [0.0016;0.008;0.04;0.2;1;5;25;125;625;3125;15625;78125;390625];
%parametry pro ALAG a vnejsi pen.
%r= [625;125;25;5;1;0.2;0.04;0.08;0.0016;0.00032;0.000064];
%parametry pro prodl. pen.
%% okrajove podminky
Podm =[0 0]; %prvni pozice levý konec, druha pozice pravý konec
        %1 vetknuty 0 volne natoceni
%% Pomocne Promene
UF=zeros(Iter,1);
Res=zeros(Iter,4);
%F=zeros(2*n+2, m);
%Kcelk=sparse(zeros(2*n+2, 2*n+2));
V=zeros(n+1,m);
Theta=zeros(n+1,m);
Napeti1=zeros(n+1, m);
Napeti2=zeros(n+1, m);
Spol=zeros(Iter,1);
%% pocet elementu a jejich vlastnosti
x=linspace(0,L,n+1);
Poc=Rozm;
%% optimalizace
options = optimset('Algorithm','sqp','MaxFunEvals',500,'TolX',1e-005,
        'DerivativeCheck','on');
for i = 1:Iter
    Koef=r(i);
    [Res(i,:) UF(i)] = fmincon(@(Rozm)UcelFceProdl(Rozm,Ro,E,Koef,Podm,
        MaxTah,MaxTlak,L,Zat,Pst),Poc,[],[],[],[],[100 100 0 0],[1000 1000],[]
```

LITERATURA

```
,options);
end
%% postprocesing
for k=1:Iter
Kcelk=sparse(zeros(2*n+2, 2*n+2));
F=zeros(2*n+2, m);
%% zatizeni
Rozm=Res(k,:);
for j= 1:m
    for i = 1:n
        q=-9.81*(Rozm(1)/1000)*(Rozm(2)/1000)*Ro-Zat(j,i);
        Le=x(i+1)-x(i);
        Fe=[1; Le/6; 1; -Le/6]* q*Le/2;
        F(((2*i -1):(2*i +2)),j)= F(((2*i -1):(2*i +2)),j) + Fe;
    end
end
Iz= (Rozm(1) * Rozm(2)^3)/12;
%% matice tuhosti
for j = 1:n
    Le=x(j+1)-x(j);
    Ke = [ 12  6*Le  -12  6*Le;
          6*Le 4*Le^2 -6*Le 2*Le^2;
          -12 -6*Le  12  -6*Le;
          6*Le 2*Le^2 -6*Le 4*Le^2] * (E*Iz)/Le^3;
    Kcelk((2*j -1):(2*j +2),(2*j -1):(2*j +2)) = Kcelk((2*j -1):(2*j +2),
                                                         (2*j -1):(2*j +2)) + Ke;
end

%% výber okrajových podmínek
% vynecháním prvních dvou řádků a sloupce získáme na levém konci vetknutí
% (0 prohnutí a 0 natocení) a pokud vynecháme jen první řádek jde jen o
% podporu (0 prohnutí, natožení libovolné) totéž platí pro poslední dva
% řádky
if (Podm(1) == 1)&(Podm(2) == 1)
    poz=[(3: 2*n) ];
elseif (Podm(1) == 0)&(Podm(2) == 1)
    poz=[(2: 2*n)];
elseif (Podm(1) == 1)&(Podm(2) == 0)
    poz=[(3: 2*n) 2*n+2];
else poz=[(2: 2*n) 2*n+2];
end

    %v levo vetknuty v pravo "volny" [(3: 2*n) 2*n+2]
    %v pravo vetknuty v levo "volny" [(2: 2*n)]
    % oboustrane "volny" [(2: 2*n) 2*n+2]
K=Kcelk(poz,poz);
F=F(poz,(1:m));
```

```

%% vypocet
D=zeros(length(F(:,1)),m);
for i = 1:m
D(:,i)=K\F(:,i);
end
%% vybrani posunu
if (Podm(1) == 1)&&(Podm(2) == 1)
    for j = 1:n-1
        V(j+1,1:m) = D(2*j-1,1:m);
        Theta(j+1,1:m) = D(2*j,1:m);
    end
elseif (Podm(1) == 0)&&(Podm(2) == 1)
    for j = 1:n-1
        V(j+1,1:m) = D(2*j,1:m);
        Theta(j,1:m) = D(2*j-1,1:m);
    end
    Theta(n,1:m) = D(length(D(:,1)),1:m);
elseif (Podm(1) == 1)&&(Podm(2) == 0)
    for j = 1:n-1
        V(j+1,1:m) = D(2*j-1,1:m);
        Theta(j+1,1:m) = D(2*j,1:m);
    end
    Theta(n,1:m) = D(length(D(:,1))-1,1:m);
    Theta(n+1,1:m) = D(length(D(:,1)),1:m);
else for j = 1:n-1
        V(j+1,1:m) = D(2*j,1:m);
        Theta(j,1:m) = D(2*j-1,1:m);
    end ;
    Theta(n,1:m) = D(length(D(:,1))-1,1:m);
    Theta(n+1,1:m) = D(length(D(:,1)),1:m);
end
%% vypocet napeti
for j = 1:n
    Le=x(j+1)-x(j);
    Napeti1(j,:) = ((Rozm(2))*E/Le)*((3/Le)*(V(j+1,:)-V(j,:))
        -(2* Theta(j,:)+Theta(j+1,:)));
    Napeti2(j,:) = -((Rozm(2))*E/Le)*((3/Le)*(V(j+1,:)-V(j,:))
        -(2* Theta(j,:)+Theta(j+1,:)));
end
Napeti1(n+1,:)=((Rozm(2))*E/Le)*((3/Le)*(V(n,:)-V(n+1,:))
    +(2* Theta(n+1,:)+Theta(n,:)));
Napeti2(n+1,:)=-((Rozm(2))*E/Le)*((3/Le)*(V(n,:)-V(n+1,:))
    +(2* Theta(n+1,:)+Theta(n,:)));
Napeti1=Napeti1*10^9;
Napeti2=Napeti2*10^9;
%% vypocet spol.
for i = 1:m

```

LITERATURA

```
if ((max(Napeti1(:,i)))< MaxTah)&&((min(Napeti1(:,i)))> -MaxTlak)&&
    &&((max(Napeti2(:,i)))< MaxTah)&&((min(Napeti2(:,i)))> -MaxTlak)
    Spol(k,1)=Spol(k,1)+Pst(i);
end
end
end
%% Zapsani vysledku do souboru
Vystup=[r(1:Iter) Res Spol UF];
save('Reseni1k25Prodl.txt','Vystup','-ascii');
```

Zdrojový kód vnější penalizační funkce

```
function [ F ] = UcelFceVnej(Rozm,Ro,E,r,Podm,MaxTah,MaxTlak,L,Zat,Pst)
%% zatizeni
m=length(Zat(:,1));
n=length(Zat(1,:))-1;
x=linspace(0,L,n+1);
Iz= (Rozm(1) * (Rozm(2))^3)/12;
F=zeros(2*n+2, m);
V=zeros(n+1,m);
Theta=zeros(n+1,m);
%% matice tuhosti
Kcelk=sparse(zeros(2*n+2, 2*n+2));
for i = 1:n
    Le=x(i+1)-x(i);
    Ke = [12 6*Le -12 6*Le;
          6*Le 4*Le^2 -6*Le 2*Le^2;
          -12 -6*Le 12 -6*Le;
          6*Le 2*Le^2 -6*Le 4*Le^2] * (E*Iz)/Le^3;
    Kcelk((2*i -1):(2*i +2),(2*i -1):(2*i +2)) = Kcelk((2*i -1):(2*i +2),
                                                         (2*i -1):(2*i +2)) + Ke;
end
for j=1:m
    for i = 1:n
        q=-9.81*(Rozm(1)/1000)*(Rozm(2)/1000)*Ro-Zat(j,i);
        Le=x(i+1)-x(i);
        Fe=[1; Le/6; 1; -Le/6]* q*Le/2;
        F((2*i -1):(2*i +2),j) = F((2*i -1):(2*i +2),j) + Fe;
    end
end
%% výber okrajových podmínek
% vynecháním prvních dvou řádků a sloupce získáme na levém konci vetknutí
% (0 prohnutí a 0 natocení) a pokud vynecháme jen první řádek jde jen o
% podporu (0 prohnutí, natocení libovolné) totéž platí pro poslední dva
% řádky
if (Podm(1) == 1)&(Podm(2) == 1)
```

```

poz=[(3: 2*n) ];
elseif (Podm(1) == 0)&(Podm(2) == 1)
    poz=[(2: 2*n)];
elseif (Podm(1) == 1)&(Podm(2) == 0)
    poz=[(3: 2*n) 2*n+2];
    else poz=[(2: 2*n) 2*n+2];
end

% oboustrane vetknuty [(3: 2*n)]
%v levo vetknuty v pravo "volny" [(3: 2*n) 2*n+2]
%v pravo vetknuty v levo "volny" [(2: 2*n)]
% oboustrane "volny" [(2: 2*n) 2*n+2]

K=Kcelk(poz,poz);
F=F(poz,(1:m));
%% vypocet
D=zeros(length(F(:,1)),m);
for j=1:m
    D(:,j)=K\F(:,j);
end
%% vybrani posunu a uhlu
if (Podm(1) == 1)&&(Podm(2) == 1)
    for i = 1:n-1
        V(i+1,(1:m)) = D(2*i-1,(1:m));
        Theta(i+1,(1:m)) = D(2*i,(1:m));
    end
elseif (Podm(1) == 0)&&(Podm(2) == 1)
    for i = 1:n-1
        V(i+1,(1:m)) = D(2*i,(1:m));
        Theta(i,(1:m)) = D(2*i-1,(1:m));
    end
    Theta(n,(1:m)) = D(length(D(:,1)),(1:m));
elseif (Podm(1) == 1)&&(Podm(2) == 0)
    for i = 1:n-1
        V(i+1,(1:m)) = D(2*i-1,(1:m));
        Theta(i+1,(1:m)) = D(2*i,(1:m));
    end
    Theta(n,(1:m)) = D(length(D(:,1))-1,(1:m));
    Theta(n+1,(1:m)) = D(length(D(:,1)),(1:m));
else for i = 1:n-1
        V(i+1,(1:m)) = D(2*i,(1:m));
        Theta(i,(1:m)) = D(2*i-1,(1:m));
    end ;
    Theta(n,(1:m)) = D(length(D(:,1))-1,(1:m));
    Theta(n+1,(1:m)) = D(length(D(:,1)),(1:m));
end
%% vypocet napeti
Napeti=zeros(n+1, m);
for j=1:m

```

LITERATURA

```
for i = 1:n
    Le=x(i+1)-x(i);
    Napeti(i,j) = ((Rozm(2))*E/Le)*((3/Le)*(V(i+1,j)-V(i,j))
        -(2* Theta(i,j)+Theta(i+1,j)));
end
Napeti(n+1,j)=((Rozm(2))*E/Le)*((3/Le)*(V(n,j)-V(n+1,j))
    +(2* Theta(n+1,j)+Theta(n,j)));
end
Napeti1=Napeti*10^4;
Napeti2=-Napeti*10^4;
Penal1=zeros(n+1,m);
Penal2=zeros(n+1,m);
for j =1:m
    Penal1(:,j)=-MaxTah/10^5+Napeti1(:,j);
    Penal2(:,j)=-Napeti2(:,j)-MaxTlak/10^5;
    Penal1(:,j)=((Penal1(:,j)+abs(Penal1(:,j)))/2).^2;
    Penal2(:,j)=((Penal2(:,j)+abs(Penal2(:,j)))/2).^2;
end;
%% hodnota ucel. gce
F=Rozm(1)*Rozm(2) +r*(max(Penal1)*Pst)+r*(max(Penal2)*Pst);
end
```

Zdrojový kód ALAG penalizační funkce

```
function [ F ] = UcelFceALAG(Rozm, Ro, E, r, Podm, MaxTah, MaxTlak, L, Zat, Pst)
%% zatizeni
m=length(Zat(:,1));
n=length(Zat(1,:))-1;
x=linspace(0,L,n+1);
Iz= (Rozm(1) * (Rozm(2))^3)/12;
F=zeros(2*n+2, m);
V=zeros(n+1,m);
Theta=zeros(n+1,m);
%% matice tuhosti
Kcelk=sparse(zeros(2*n+2, 2*n+2));
for i = 1:n
    Le=x(i+1)-x(i);
    Ke = [12 6*Le -12 6*Le;
        6*Le 4*Le^2 -6*Le 2*Le^2;
        -12 -6*Le 12 -6*Le;
        6*Le 2*Le^2 -6*Le 4*Le^2] * (E*Iz)/Le^3;
    Kcelk((2*i -1):(2*i +2), (2*i -1):(2*i +2)) = Kcelk((2*i -1):(2*i +2),
        (2*i -1):(2*i +2)) + Ke;
end
for j=1:m
    for i = 1:n
```

```

q=-9.81*(Rozm(1)/1000)*(Rozm(2)/1000)*Ro-Zat(j,i);
Le=x(i+1)-x(i);
Fe=[1; Le/6; 1; -Le/6]* q*Le/2;
F((2*i -1):(2*i +2),j) = F((2*i -1):(2*i +2),j) + Fe;
end
end
%% výber okrajových podmínek
% vynecháním prvních dvou řádky a sloupce získáme na levém konci vetknutí
% (0 prohnutí a 0 natocení) a pokud vynecháme jen první řádek jde jen o
% podporu (0 prohnutí, natocení libovolné) totéž platí pro poslední dva
% řádky
if (Podm(1) == 1)&(Podm(2) == 1)
    poz=[(3: 2*n) ];
elseif (Podm(1) == 0)&(Podm(2) == 1)
    poz=[(2: 2*n)];
elseif (Podm(1) == 1)&(Podm(2) == 0)
    poz=[(3: 2*n) 2*n+2];
else poz=[(2: 2*n) 2*n+2];
end

% oboustrane vetknuty [(3: 2*n)]
%v levo vetknuty v pravo "volny" [(3: 2*n) 2*n+2]
%v pravo vetknuty v levo "volny" [(2: 2*n)]
% oboustrane "volny" [(2: 2*n) 2*n+2]

K=Kcelk(poz,poz);
F=F(poz,(1:m));
%% vypocet
D=zeros(length(F(:,1)),m);
for j=1:m
    D(:,j)=K\F(:,j);
end
%% vybrani posunu a uhlu
if (Podm(1) == 1)&&(Podm(2) == 1)
    for i = 1:n-1
        V(i+1,(1:m)) = D(2*i-1,(1:m));
        Theta(i+1,(1:m)) = D(2*i,(1:m));
    end
elseif (Podm(1) == 0)&&(Podm(2) == 1)
    for i = 1:n-1
        V(i+1,(1:m)) = D(2*i,(1:m));
        Theta(i,(1:m)) = D(2*i-1,(1:m));
    end
    Theta(n,(1:m)) = D(length(D(:,1)),(1:m));
elseif (Podm(1) == 1)&&(Podm(2) == 0)
    for i = 1:n-1
        V(i+1,(1:m)) = D(2*i-1,(1:m));
        Theta(i+1,(1:m)) = D(2*i,(1:m));
    end
end

```

LITERATURA

```
Theta(n,(1:m)) = D(length(D(:,1))-1,(1:m));
Theta(n+1,(1:m)) = D(length(D(:,1)),(1:m));
else for i = 1:n-1
    V(i+1,(1:m)) = D(2*i,(1:m));
    Theta(i,(1:m)) = D(2*i-1,(1:m));
    end ;
Theta(n,(1:m)) = D(length(D(:,1))-1,(1:m));
Theta(n+1,(1:m)) = D(length(D(:,1)),(1:m));
end
%% vypočet napeti
Napeti=zeros(n+1, m);
for j=1:m
    for i = 1:n
        Le=x(i+1)-x(i);
        Napeti(i,j) = ((Rozm(2))*E/Le)*((3/Le)*(V(i+1,j)-V(i,j))
            -(2* Theta(i,j)+Theta(i+1,j)));
    end
    Napeti(n+1,j)=((Rozm(2))*E/Le)*((3/Le)*(V(n,j)-V(n+1,j))
        +(2* Theta(n+1,j)+Theta(n,j)));
end
Napeti1=Napeti*10^4;%(10^9)
Napeti2=-Napeti*10^4;
Penal1=zeros(n+1,m);
Penal2=zeros(n+1,m);
for j=1:m
    Penal1(:,j)=(-MaxTah/10^5+Napeti1(:,j));
    Penal2(:,j)=(-Napeti2(:,j)-MaxTlak/10^5);
end
Penal1=Penal1+(Rozm(3)/(2*r));
Penal2=Penal2+(Rozm(4)/(2*r));
for j=1:m
    Penal1(:,j)=((Penal1(:,j)+abs(Penal1(:,j)))/2).^2;
    Penal2(:,j)=((Penal2(:,j)+abs(Penal2(:,j)))/2).^2;
end
%% hodnota ucel. gce
F=Rozm(1)*Rozm(2) +r*(max(Penal1)*Pst)+r*(max(Penal2)*Pst)
    -(Rozm(3)^2 + Rozm(4)^2)/(4*r);
end
```

Zdrojový kód rozšířené vnitřní penalizační funkce

```
function [ F ] = UcelFceProdl(Rozm, Ro, E, r, Podm, MaxTah, MaxTlak, L, Zat, Pst)
%% zatizeni
m=length(Zat(:,1));
n=length(Zat(1,:))-1;
x=linspace(0,L,n+1);
```



```

Iz= (Rozm(1) * (Rozm(2))^3)/12;
F=zeros(2*n+2, m);
V=zeros(n+1,m);
Theta=zeros(n+1,m);
%% matice tuhosti
Kcelk=sparse(zeros(2*n+2, 2*n+2));
for i = 1:n
    Le=x(i+1)-x(i);
    Ke = [12 6*Le -12 6*Le;
          6*Le 4*Le^2 -6*Le 2*Le^2;
          -12 -6*Le 12 -6*Le;
          6*Le 2*Le^2 -6*Le 4*Le^2] * (E*Iz)/Le^3;
    Kcelk((2*i -1):(2*i +2),(2*i -1):(2*i +2)) = Kcelk((2*i -1):(2*i +2),
                                                         (2*i -1):(2*i +2)) + Ke;
end
for j=1:m
    for i = 1:n
        q=-9.81*(Rozm(1)/1000)*(Rozm(2)/1000)*Ro-Zat(j,i);
        Le=x(i+1)-x(i);
        Fe=[1; Le/6; 1; -Le/6]* q*Le/2;
        F((2*i -1):(2*i +2),j) = F((2*i -1):(2*i +2),j) + Fe;
    end
end
%% výber okrajových podmínek
% vynecháním prvních dvou řádky a sloupce získáme na levém konci vetknutí
% (0 prohnutí a 0 natocení) a pokud vynecháme jen první rádek jde jen o
% podporu (0 prohnutí, natocení libovolné) totéž platí pro poslední dva
% řádky
if (Podm(1) == 1)&(Podm(2) == 1)
    poz=[(3: 2*n) ];
elseif (Podm(1) == 0)&(Podm(2) == 1)
    poz=[(2: 2*n)];
elseif (Podm(1) == 1)&(Podm(2) == 0)
    poz=[(3: 2*n) 2*n+2];
else poz=[(2: 2*n) 2*n+2];
end
% oboustrane vetknuty [(3: 2*n)]
%v levo vetknuty v pravo "volny" [(3: 2*n) 2*n+2]
%v pravo vetknuty v levo "volny" [(2: 2*n)]
% oboustrane "volny" [(2: 2*n) 2*n+2]
K=Kcelk(poz,poz);
F=F(poz,(1:m));
%% vypocet
D=zeros(length(F(:,1)),m);
for j=1:m
    D(:,j)=K\F(:,j);
end

```

LITERATURA

```
%% vybrani posunu a uhlu
if (Podm(1) == 1)&&(Podm(2) == 1)
    for i = 1:n-1
        V(i+1,(1:m)) = D(2*i-1,(1:m));
        Theta(i+1,(1:m)) = D(2*i,(1:m));
    end
elseif (Podm(1) == 0)&&(Podm(2) == 1)
    for i = 1:n-1
        V(i+1,(1:m)) = D(2*i,(1:m));
        Theta(i,(1:m)) = D(2*i-1,(1:m));
    end
    Theta(n,(1:m)) = D(length(D(:,1)),(1:m));
elseif (Podm(1) == 1)&&(Podm(2) == 0)
    for i = 1:n-1
        V(i+1,(1:m)) = D(2*i-1,(1:m));
        Theta(i+1,(1:m)) = D(2*i,(1:m));
    end
    Theta(n,(1:m)) = D(length(D(:,1))-1,(1:m));
    Theta(n+1,(1:m)) = D(length(D(:,1)),(1:m));
else for i = 1:n-1
        V(i+1,(1:m)) = D(2*i,(1:m));
        Theta(i,(1:m)) = D(2*i-1,(1:m));
    end ;
    Theta(n,(1:m)) = D(length(D(:,1))-1,(1:m));
    Theta(n+1,(1:m)) = D(length(D(:,1)),(1:m));
end
%% vypocet napeti
Napeti=zeros(n+1, m);
for j=1:m
    for i = 1:n
        Le=x(i+1)-x(i);
        Napeti(i,j) = ((Rozm(2))*E/Le)*((3/Le)*(V(i+1,j)-V(i,j))
            -(2* Theta(i,j)+Theta(i+1,j)));
    end
    Napeti(n+1,j)=((Rozm(2))*E/Le)*((3/Le)*(V(n,j)-V(n+1,j))
        +(2* Theta(n+1,j)+Theta(n,j)));
end
Napeti1=Napeti*10^9;%(10^9)
Napeti2=-Napeti*10^9;
Penal1=zeros(n+1,m);
Penal2=zeros(n+1,m);
for j=1:m
    Penal1(:,j)=MaxTah-Napeti1(:,j);
    Penal2(:,j)=Napeti2(:,j)+MaxTlak;
end
P0=r^0.5;
for j = 1:m
```

```

for i = 1:(n+1)
    if Penal1(i,j)<P0
        Penal1(i,j)=(1/P0) * (3-3*(Penal1(i,j)/P0)+(Penal1(i,j)/P0)^2);
    else
        Penal1(i,j)=1/Penal1(i,j);
    end
    if Penal2(i,j)<P0
        Penal2(i,j)=(1/P0) * (3-3*(Penal2(i,j)/P0)+(Penal2(i,j)/P0)^2);
    else
        Penal2(i,j)=1/Penal2(i,j);
    end
end
end
%% hodnota ucel. gce
F=Rozm(1)*Rozm(2) +r*(max(Penal1)*Pst)+r*(max(Penal2)*Pst);
end

```

Zdrojový kód generování scénářů

```

%% parametry site
Delka=10;
n1=1000;
x=linspace(0,Delka,n1+1);
%% parametry zatizeni
k1=normrnd(1.8,0.55,[1 10])
d1=normrnd(1.8,0.55,[1 10])
l1=normrnd(5.5,1.2,[1 1])
Scen=zeros(length(k1)*length(d1)*length(l1)+1,n1+1);
%% vypocet zatizeni
Scen(1,:)=0.1*ones(1,n1+1);
for i=1:length(k1)
    for j=1:length(d1)
        for m=1:length(l1)
            if k1(i)<1
                Zat1=ones(1,n1+1);
            else
                Zat1=(k1(i)/l1(m))*((x/l1(m)).^(k1(i)-1)).*exp(-(x/l1(m)).^k1(i));
            end
            if d1(j)<1
                Zat2=ones(1,n1+1);
            else
                Zat2=(d1(j)/l1(m))*exp(-((10-x)/l1(m)).^(d1(j))).
                    *(((10-x)/l1(m)).^(d1(j)-1));
            end;
            Zat3=Zat1.*Zat2;
            Suma=sum(Zat3((2:n1))*(x(2)-x(1)));

```

LITERATURA

```
Zat3=(Zat3/Suma)*10;
Scen((i-1)*length(d1)*length(l1)+(j-1)*length(l1)+m+1,:)=Zat3;
    end
end;
end;
%% Pst jednotlivých scenaru
Pst=zeros(length(k1)*length(d1)*length(l1),1);
Pst(1,1)=0.25;
Zb=1-Pst(1,1);
for i=1:(length(k1)*length(d1)*length(l1))
    Pst(i+1,1)=Zb/(length(k1)*length(d1)*length(l1));
end;
Pst(length(k1)*length(d1)*length(l1)+1,1)=1
    -sum(Pst(1:(length(k1)*length(d1)*length(l1))));
sum(Pst)
%% zapis do souboru
save('Scenar1h25.mat','Scen','Pst')
```